Aritmética

Unidad 1

- Identifica las clases de proposiciones lógicas (simples y compuestas) y los operadores lógicos (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional).
- Determina el valor de verdad de los esquemas moleculares, aplicando los operadores lógicos.
- Comprende la relación de pertenencia entre elemento y conjunto.
- Determina la inclusión e igualdad entre conjuntos.
- Realiza las operaciones básicas entre conjuntos (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento).
- Aplica las distintas leyes de idempotencia, conmutativa, asociativa y distributiva al resolver problemas sobre conjuntos.
- Identifica el orden, lugar y base de un numeral.
- Realiza correctamente la conversión de números entre bases.
- Expresa las propiedades sobre adición, sustracción, multiplicación y división en el conjunto de los números naturales.
- Identifica las propiedades de los números enteros en la recta numérica.

Unidad 2

- Identifica los principios de divisibilidad y hace uso de cada uno de sus criterios.
- Utiliza los principios de la divisibilidad en la adición, sustracción y multiplicación de múltiplos.
- Utiliza los criterios de divisibilidad en la resolución de problemas.
- Discrimina entre números primos y complejos.
- Identifica números primos entre sí (PESÍ).
- Evalúa los divisores de los números utilizando la descomposición canónica.
- Aplica las propiedades de los números primos.
- Comprende los métodos utilizados para el cálculo del MCD y MCM.
- Demuestra las propiedades del MCD y el MCM.
- Comprende la definición de densidad en los racionales.
- Analiza las operaciones entre números racionales.
- Aplica operaciones de adición, multiplicación división y multiplicación en las diferentes clases de fracciones.

GRACIAS A LOS PRIMOS

Dentro de la familia de los cicádicos, más conocidos como cigarras, sobresalen dos especies particulares por vivir uno de los ciclos de vida más particulares, tanto dentro del reino de los insectos como fuera de este: la *Magicicada tredecim* que tiene un ciclo de 13 años y la *Magicicada septendecim* que tiene uno de 17 años.

La supervivencia de las cigarras depende de las propiedades de los números más fundamentales de las matemáticas: los números primos, números que son solo divisibles por sí mismos y por 1.

La elección de un ciclo de 13 y 17 años no parece muy arbitraria ya que estos permiten a las cigarras tener una ventaja evolutiva, pues estos números primos ayudan a evitar a otros animales de ciclos de vida periódicos. Por ejemplo: si un depredador aparece cada seis años en el bosque, una cigarra con un ciclo de ocho o nueve años coincidiría con el depredador mucho más frecuente que una cigarra con una ciclo de siete años.

Contenido:

Unidad 1

- Lógica proposicional.
- Teoría de conjuntos.
- Numeración.
- Operaciones básicas en el conjunto ($\mathbb{Z}^+$).

Unidad 2

- Teoría de divisibilidad.
- Números primos.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Conjunto de números racionales($\mathbb{Q}$).

Unidad 3

- Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}^+$.
- Razones y proporciones.
- Magnitudes proporcionales.
- Regla de tres.
- Tanto por ciento.

Unidad 4

- Promedios.
- Estadística.
- Análisis combinatorio.
- Probabilidad.

Unidad 3

- Evalúa los criterios de inclusión y exclusión de cuadrados y cubos perfectos.
- Comprende el proceso de extracción de la raíz cuadrada y cúbica de números naturales por defecto y exceso.
- Calcula la raíz cuadrada y cúbica, así como las potencias de números naturales.
- Identifica las clases de razón y proporción.
- Utiliza la definición de razones, proporciones y las series de razones geométricas equivalentes.
- Evalúa las propiedades sobre razones, proporciones y serie de razones geométricas equivalentes.
- Analiza las propiedades sobre las magnitudes directas e inversas en problemas con engranajes y reparto proporcional.
- Diferencia entre regla de tres directa e inversa.
- Evalúa el tanto por ciento relacionado con aumentos o descuentos únicos.

Unidad 4

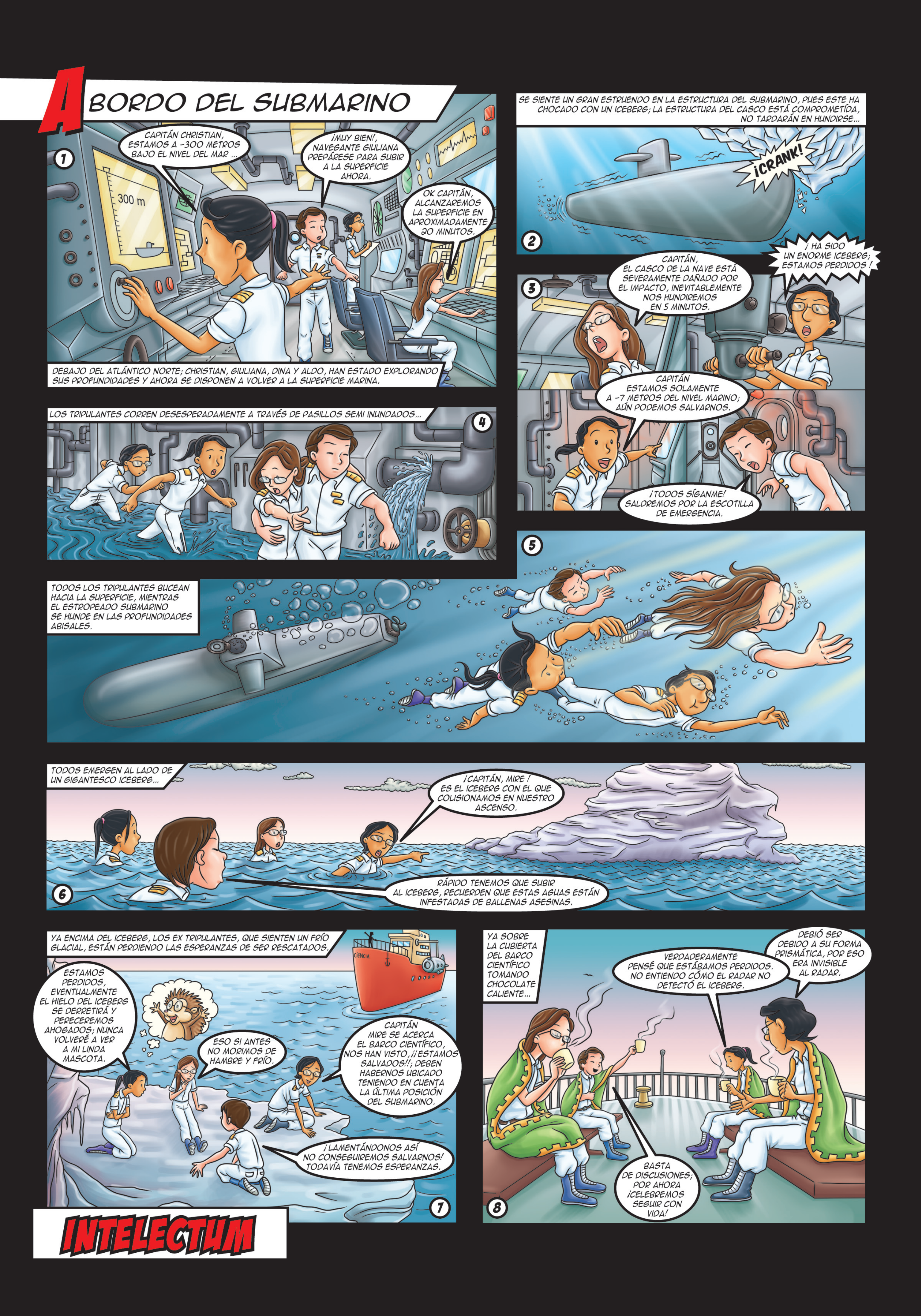
- Identifica el promedio aritmético, ponderado, geométrico y armónico, además evalúa sus propiedades.
- Calcula el promedio de un conjunto de números.
- Discrimina entre variable cualitativa y cuantitativa.
- Define y comprende las medidas de posición (media, mediana y moda).
- Emplea cuadros estadísticos para presentar datos ordenadamente.
- Calcula la media, la mediana y la moda de datos clasificados y no clasificados.
- Organiza los datos en un gráfico estadístico (histogramas, pictogramas, diagrama de barras).
- Utiliza los principios fundamentales de conteo de adición y multiplicación.
- Utiliza el principio de multiplicación y adición en los problemas propuestos.
- Define y discrimina entre variación, permutación y combinación.
- Analiza el experimento aleatorio y define correctamente un espacio muestral.

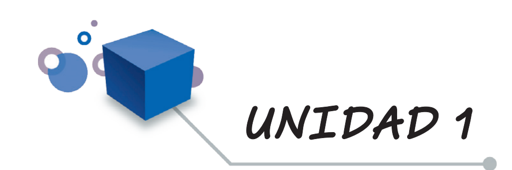
DEBERÍAS SABER QUE...

Las hembras ponen sus huevos antes de morir, es ahí cuando los insectos jóvenes (o ninfas) caen al suelo y penetran en la tierra pudiendo vivir dentro de ella de 4 a 17 años (dependiendo de la especie) alimentándose de la savia de las raíces. Después de ese período empiezan a cavar túneles para luego subir en masa a los árboles para transformarse en adultos con alas y genitalia desarrollada, listos para el apareamiento. El momento crítico y más débil se da en las primeras tres horas después de que salen a la superficie ya que sus alas y su nueva piel aún no están listas. Finalmente mueren, otra vez en masa, dejando sus larvas enterradas para la secuela.

De acuerdo a los estudios realizados, los ciclos de vida de sus principales depredadores en la superficie son de 2 y 3 años.

¿Se imaginan lo que pasaría si cada vez que salen las cigarras de su morada subterránea esto coincidiera con el momento de reproducción de sus depredadores una y otra vez sin parar? La respuesta es simple las cigarras se extinguirían. al tener un ciclo primo de vida es imposible que esto ocurra.


A BORDO DEL SUBMARINO
CAPITÁN CHRISTIAN, ESTAMOS A -300 METROS BAJO EL NIVEL DEL MAR ...
¡MUY BIEN!, NAVEGANTE GIULIANA PREPÁRESE PARA SUBIR A LA SUPERFICIE AHORA.
OK CAPITÁN, ALCANZAREMOS LA SUPERFICIE EN APROXIMADAMENTE 20 MINUTOS.
300 m
DEBAJO DEL ATLÁNTICO NORTE; CHRISTIAN, GIULIANA, DINA Y ALDO, HAN ESTADO EXPLORANDO SUS PROFUNDIDADES Y AHORA SE DISPONEN A VOLVER A LA SUPERFICIE MARINA.
SE SIENTE UN GRAN ESTRUENDO EN LA ESTRUCTURA DEL SUBMARINO, PUES ESTE HA CHOCADO CON UN ICEBERG; LA ESTRUCTURA DEL CASCO ESTÁ COMPROMETÍDA, NO TARDARÁN EN HUNDIRSE...
¡CRANK!
CAPITÁN, EL CASCO DE LA NAVE ESTÁ SEVERAMENTE DAÑADO POR EL IMPACTO, INEVITABLEMENTE NOS HUNDIREMOS EN 5 MINUTOS.
¡ HA SIDO UN ENORME ICEBERG; ESTAMOS PERDIDOS !
CAPITÁN ESTAMOS SOLAMENTE A -7 METROS DEL NIVEL MARINO; AÚN PODEMOS SALVARNOS.
¡TODOS SÍGANME! SALDREMOS POR LA ESCOTILLA DE EMERGENCIA.
LOS TRIPULANTES CORREN DESESPERADAMENTE A TRAVÉS DE PASILLOS SEMI INUNDADOS...
TODOS LOS TRIPULANTES BUCEAN HACIA LA SUPERFICIE, MIENTRAS EL ESTROPEADO SUBMARINO SE HUNDE EN LAS PROFUNDIDADES ABISALES.
TODOS EMERGEN AL LADO DE UN GIGANTESCO ICEBERG...
¡CAPITÁN, MIRE ! ES EL ICEBERG CON EL QUE COLISIONAMOS EN NUESTRO ASCENSO.
RÁPIDO TENEMOS QUE SUBIR AL ICEBERG, RECUERDEN QUE ESTAS AGUAS ESTÁN INFESTADAS DE BALLENAS ASESINAS.
YA ENCIMA DEL ICEBERG, LOS EX TRIPULANTES, QUE SIENTEN UN FRÍO GLACIAL, ESTÁN PERDIENDO LAS ESPERANZAS DE SER RESCATADOS.
ESTAMOS PERDIDOS, EVENTUALMENTE EL HIELO DEL ICEBERG SE DERRETIRÁ Y PERECEREMOS AHOGADOS; NUNCA VOLVERÉ A VER A MI LINDA MASCOTA.
ESO SI ANTES NO MORIMOS DE HAMBRE Y FRÍO.
CAPITÁN MIRE SE ACERCA EL BARCO CIENTÍFICO, NOS HAN VISTO, ¡¡ESTAMOS SALVADOS!!; DEBEN HABERNOS UBICADO TENIENDO EN CUENTA LA ÚLTIMA POSICIÓN DEL SUBMARINO.
¡LAMENTÁNDONOS ASÍ NO CONSEGUIREMOS SALVARNOS! TODAVÍA TENEMOS ESPERANZAS.
YA SOBRE LA CUBIERTA DEL BARCO CIENTÍFICO TOMANDO CHOCOLATE CALIENTE...
VERDADERAMENTE PENSÉ QUE ESTÁBAMOS PERDIDOS. NO ENTIENDO CÓMO EL RADAR NO DETECTÓ EL ICEBERG.
DEBIÓ SER DEBIDO A SU FORMA PRISMÁTICA, POR ESO ERA INVISIBLE AL RADAR.
BASTA DE DISCUSIONES; POR AHORA ¡CELEBREMOS SEGUIR CON VIDA!
INTELECTUM



LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es aquella expresión en la que se afirma algo y se caracteriza por tener un solo valor veritativo, es decir, puede ser verdadera o falsa pero no ambas a la vez.
Si una proposición es verdadera se le asignará la letra V y si es falsa la letra F.

Nota
A la veracidad o falsedad de una proposición se le denomina **valor de verdad**.

Notación
Representaremos a las proposiciones mediante las letras minúsculas de la segunda mitad del alfabeto: p, q, r, s, ... A estas se les denomina **variables proposicionales**.

Ejemplos:
- p: Ricardo es ingeniero industrial.
- q: Inés estudia matemática.

Observación
Los enunciados:
- Prohibido jugar
- ¡Cuidado!
- ¿Qué hiciste?

no son proposiciones.

CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

a) **Proposiciones simples o atómicas.** Son aquellas que están constituidas por una sola proposición.

Ejemplos:
- 7 es un número impar.
- Johana viajó a Cusco.

b) **Proposiciones compuestas o moleculares.** Son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones enlazadas entre sí por conjunciones gramaticales o afectadas por el adverbio de negación **no**.

Ejemplos:

- Voy a la biblioteca **o** al teatro.
- **Si** estudio **entonces** aprobaré el curso de Aritmética.

CONECTIVOS LÓGICOS

Llamados también operadores. Son símbolos que reemplazan a las conjunciones gramaticales y al adverbio de negación **no**.
Los conectivos lógicos que más usaremos son los siguientes:

Nota
Las conjunciones gramaticales son palabras que enlazan proposiciones, sintagmas o palabras. Por ejemplo: y, e, ni, o, etc.

En el lenguaje común	Símbolo	Nombre de la proposición
No es cierto que...	$\sim$	Negación
... y...	$\wedge$	Conjunción
... o...	$\vee$	Disyunción
Si... entonces...	$\Rightarrow$	Condicional
... si y solo si...	$\Leftrightarrow$	Bicondicional

Atención
Por convención $\sim$ se coloca a la izquierda de la proposición que se niega.

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

La negación ($\sim$)

Dada una proposición p. Se denomina negación de p a la proposición denotada por **$\sim$p**, la cual niega a la proposición inicial, convirtiéndola en falsa cuando es verdadera y viceversa.
Su tabla de verdad es:

p	$\sim$p
V	F
F	V

$\sim$p se lee: “no p” o “no es cierto que p”.

Ten en cuenta
Una **tabla de verdad** es un diagrama que permite expresar todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus proposiciones simples.

Ejemplos:
- p: 2 es un número primo. (V)
- $\sim$p: 2 no es un número primo. (F)
- q: un rectángulo tiene 3 lados. (F)
- $\sim$q: no es cierto que un rectángulo tiene 3 lados. (V)

Recuerda

Una proposición conjuntiva será verdadera, si sus proposiciones componentes (p y q) son verdaderas. En otros casos, será falsa.

La conjunción (∧)

Es la proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **y**.
Se denota: $p \wedge q$ (se lee: p y q).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

- Miguel piensa y Juan actúa.
  p ∧ q

Nota

Una proposición disyuntiva será falsa, si sus proposiciones componentes (p y q) son falsas.
En otros casos, será verdadera.

La disyunción (∨)

Es la proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **o**.
Se denota: $p \vee q$ (se lee: p o q).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

- Hoy es viernes o es mayo.
  p ∨ q

Nota

La proposición condicional será falsa únicamente cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

La condicional (⇒)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples: p y q se relacionan mediante el conectivo lógico **si... entonces...** Se denota: $p \Rightarrow q$ (se lee: si p entonces q).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Donde:

p: antecedente
q: consecuente

Ejemplo:

- Si estudio, entonces aprobaré.
  p ⇒ q

Atención

La proposición bicondicional será verdadera en los casos en que las proposiciones que la conforman tengan el mismo valor de verdad.

La bicondicional (⇔)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples: p y q, se relacionan mediante el conectivo lógico **si y solo si**. Se denota: $p \Leftrightarrow q$ (se lee: p si solo si q).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo:

- Habrá desfile si y solo si hay garantías.
  p ⇔ q

Observación

Una proposición disyuntiva exclusiva es verdadera si las proposiciones que la conforman tienen valores de verdad diferentes.

La disyunción exclusiva (△)

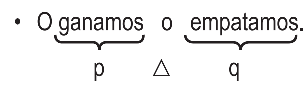
Es aquella proposición en la que se relacionan dos proposiciones simples: p y q, mediante el conectivo lógico **o... o...** Se denota: $p \triangle q$ (se lee: o p o q).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \triangle q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

- O ganamos o empatamos.



  p △ q

ESQUEMAS MOLECULARES

Un esquema molecular es la combinación de variables proposicionales, conectivos lógicos y signos de agrupación.

Ejemplos:

- p ∧ (q ⇒ ~p)
- [(~q ∨~p) ∧ p] ⇒ q
- (p △ q) ∧ (~p ⇔ q)

Evaluación de esquemas moleculares

Consiste en obtener los valores del **conectivo principal** a partir de los valores de cada una de las variables proposicionales.

Ejemplo:
Evalúa el siguiente esquema molecular: (q ∧ p) ⇒ (p ∨ ~q)

Resolución:
Procedimiento:
1.° Negamos q: ~q
2.° Evaluamos (q ∧ p) y (p ∨ ~q).
3.° Evaluamos (q ∧ p) ⇒ (p ∨ ~q).

Conectivo principal

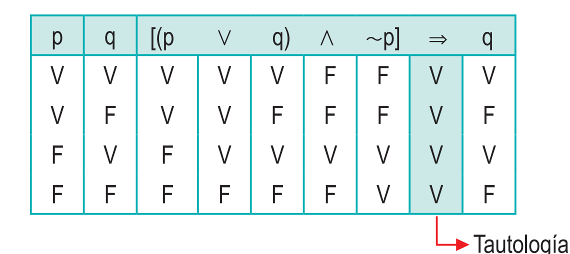
p	q	(q	∧	p)	⇒	(p	∨	~q)
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V	F	V	V

Matriz principal

Clasificación de los esquemas moleculares

Según los valores obtenidos en la matriz principal, los esquemas moleculares se clasifican en:

Tautológicos. Cuando los valores de la matriz principal, son todos verdaderos.
Ejemplo:



p	q	[(p	∨	q)	∧	~p]	⇒	q
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	F

Tautología

∴ El esquema es tautológico.

Contradictorios. Cuando los valores de la matriz principal, son todos falsos.
Ejemplo:

p	q	~	(~q)	△	[q	∧	(~p	∨	q)]
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V	F	F

Contradicción

∴ El esquema es contradictorio.

Consistentes. Cuando en la matriz principal hay por lo menos una verdad y una falsedad.
Ejemplo:

p	q	(~p	∨	q)	∧	(~q	⇔	~p)
V	V	F	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V

Consistencia

∴ El esquema es consistente.

Observación

En un esquema molecular, el conectivo principal es el operador de mayor jerarquía que se encuentra libre de signos de colección.
También, denominamos matriz principal de una tabla de verdad, a la columna que contiene los valores de verdad correspondientes al conectivo principal.

Ejemplo:

Conectivo principal

p	q	q	⇔	(~p	∧	q)
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Matriz principal

Atención

Para evaluar una tabla de verdad de 2 variables proposicionales se necesitan 4 valores de verdad. Para evaluar una tabla de verdad de 3 variables proposicionales se necesitan 8 valores de verdad. En general, el número de valores de verdad que se asigna a cada variable resulta de aplicar la formula 2^n, donde n es el número de variables proposicionales que hay en el esquema molecular.

Problemas resueltos

1 De los siguientes enunciados, indica cuáles son proposiciones lógicas.

a) Los gatos son mamíferos.
b) ¿Cuál es tu edad?
c) El ácido sulfúrico corroe la madera.
d) Sé honesto y trabajador.
e) 8 es un número par y mayor que 7.

Resolución:
Los enunciados a, c y e son proposiciones lógicas, ya que se les puede asignar un valor de verdad o falsedad.

Los enunciados b y d no son proposiciones lógicas.

$\therefore$ a, c y e son proposiciones lógicas.

2 Al construir la tabla de verdad de:

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q$$

El número de valores verdaderos en el operador principal es:

Resolución:
Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	(p	⇒	~q)	∧	~q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

$\therefore$ En el operador principal hay dos valores verdaderos.

3 ¿Cuántas posibles combinaciones en los valores de verdad de p, q, r, s y t existen?

Resolución:
El número de posibles combinaciones de los valores de verdad de n proposiciones componentes es 2^n.

En el problema se tiene 5 proposiciones: p, q, r, s, y t.

Entonces:
n.º de posibles combinaciones $= 2^5 = 32$

4 Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si 4 + 2 = 6 entonces 7 > 8.
II. 5 es mayor que 2 ó 4 es menor que 1.

Resolución:
En el problema:

I. Si $\underbrace{4 + 2 = 6}_{V}$, entonces $\underbrace{7 > 8}_{F}$.

$V \Rightarrow F$: F

II. $\underbrace{\text{5 es mayor que 2}}_{V}$ ó $\underbrace{\text{4 es menor que 1}}_{F}$.

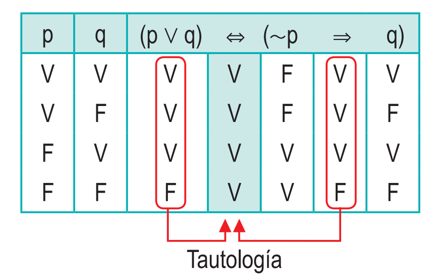
$V \vee F$: V

5 Sea la proposición compuesta:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$$

Indica qué tipo de esquema es.

Resolución:
Construimos la tabla de verdad y evaluamos el esquema molecular:



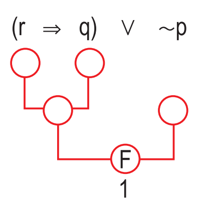
p	q	(p ∨ q)	⇔	(~p	⇒	q)
V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Tautología

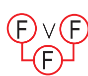
$\therefore$ El esquema es tautológico.

6 Sabiendo que $(r \Rightarrow q) \vee \sim p$ es falso; halla los valores de verdad de p, q y r.

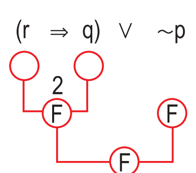
Resolución:
Se tiene:



Para que (1) sea falso se debe cumplir:



Entonces:



Para que (2) sea falso se debe cumplir:

V ⇒ F : F

Luego:

(r ⇒ q) ∨ ~p

r = V, q = F; (r ⇒ q) = F; ~p = F (p = V); resultado: F

$\therefore$ p = V; q = F; r = V

7 Halla la tabla de verdad del siguiente esquema molecular.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Resolución:

Construimos la tabla de verdad y evaluamos el esquema molecular:

p	q	(p	⇒	q)	⇔	(~p	∨	q)
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	F

Matriz principal

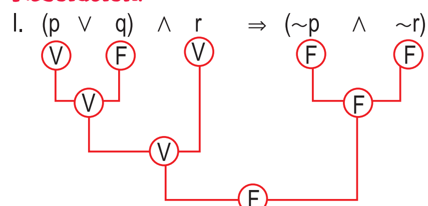
8 Determina el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares, si p = V; q = F y r = V.

I. $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$

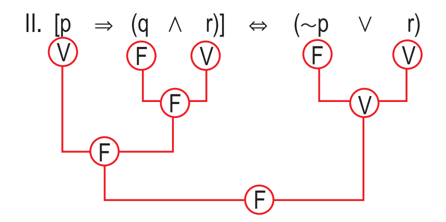
II. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (\sim p \vee r)$

Resolución:

I. $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$



II. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow (\sim p \vee r)$



9 Se define el conectivo lógico α mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	p α q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

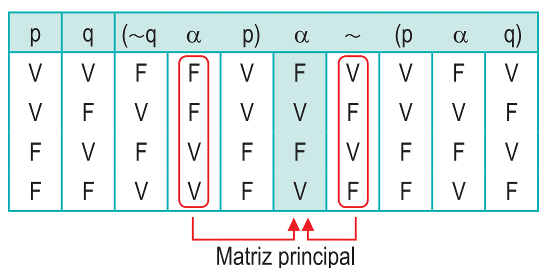
Evalúa el siguiente esquema molecular y da como respuesta los valores de verdad de la matriz principal.

$(\sim q \ \alpha \ p) \ \alpha \sim(p \ \alpha \ q)$

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	(~q	α	p)	α	~	(p	α	q)
V	V	F	F	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F	F	V	F



10 Si $(p \wedge q)$ es verdadero y $(q \Rightarrow t)$ es falso, ¿cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $\sim[\sim(q \wedge p) \wedge p]$

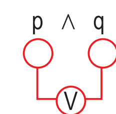
II. $\sim(\sim p \vee t) \vee q$

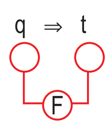
III. $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \Leftrightarrow \sim(q \Rightarrow t)$

Resolución:

Primero determinamos los valores de verdad de p, q y t.

Del enunciado:

$p \wedge q$ 

$q \Rightarrow t$ 

Para que $(p \wedge q)$ sea verdadero, se debe cumplir:

$p = V$ y $q = V$

Para que $(q \Rightarrow t)$ sea falso, se debe cumplir:

$q = V$ y $t = F$

Luego:

I. $\sim[\sim(q \wedge p) \wedge p]$
$\sim[\sim(V \wedge V) \wedge V]$
$\sim[\sim(V) \wedge V]$
$\sim[F \wedge V]$
$\sim(F)$
V

II. $\sim(\sim p \vee t) \vee q$
$\sim(\sim(V) \vee F) \vee V$
$\sim(F \vee F) \vee V$
$\sim(F) \vee V$
$V \vee V$
V

III. $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \Leftrightarrow \sim(q \Rightarrow t)$
$[\sim(V) \vee (V \wedge \sim(F))] \Leftrightarrow \sim(V \Rightarrow F)$
$[F \vee (V \wedge V)] \Leftrightarrow \sim(F)$
$[F \vee V] \Leftrightarrow V$
$V \Leftrightarrow V$
V

∴ Todas son verdaderas.

11 Representa simbólicamente la siguiente proposición compuesta: "Iré de vacaciones o estaré sin hacer nada si tengo tiempo para ello y no tengo que ir a trabajar".

Resolución:

Reconocemos las proposiciones:

p: iré de vacaciones
q: estaré sin hacer mada
r: tengo tiempo
s: tengo que ir a trabajar

De la proposición compuesta, se observa que p y q son consecuencia de r y ~s.

Por lo tanto, la proposición compuesta se puede representar simbólicamente de la siguiente manera:

$(r \wedge \sim s) \Rightarrow (p \vee q)$

TEORÍA DE CONJUNTOS

Nota

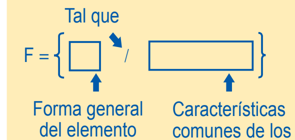
- Los elementos de un conjunto pueden ser abstractos (número, letras, etc.) o concretos (personas, animales, etc.).
- Los conjuntos se representan mediante figuras geométricas cerradas llamadas: "Diagramas de Venn-Euler".
- La relación de pertenencia es una relación exclusiva de elemento a conjunto.

Atención

ℕ representa al conjunto de los números naturales:
ℕ = {0; 1; 2; 3; ...}

Observación

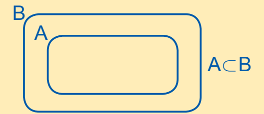
En general, los conjuntos determinados por comprensión tienen la siguiente estructura:



Recuerda

Gráficamente, la inclusión de dos conjuntos A y B se representa así:

Del ejemplo:



NOCIÓN DE CONJUNTO

Se entiende por conjunto a la colección, agrupación o reunión de objetos distinguidos entre sí; los cuales reciben el nombre de **elementos**.

Ejemplos:
- Los tigres.
- Letras de la palabra GENIO.
- Libros de aritmética en una biblioteca.
- Meses del año.

Notación	Representación gráfica
Nombre del conjunto (letra mayúscula) A = {j; o; s; u; e} Elementos del conjunto A (letras minúsculas separadas por punto y coma).	Diagrama de Venn-Euler: A: •j •o •s •u •e

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si x es un elemento del conjunto A, entonces se dice que "x pertenece al conjunto A" y se denota: $x \in A$

En el caso de no pertenecer x al conjunto A, se denota: $x \notin A$

Ejemplo:
Sea el conjunto I = {4; 9; 16; 25}; entonces:
- $4 \in I$: 4 pertenece al conjunto I.
- $10 \notin I$: 10 no pertenece al conjunto I.
- $16 \in I$: 16 pertenece al conjunto I.
- $21 \notin I$: 21 no pertenece al conjunto I.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión	Por comprensión
Es cuando se nombran todos y cada uno de los elementos del conjunto. Ejemplo: P = {4; 5; 6; 7; 8}	Es cuando se indica una característica particular y común a sus elementos. Ejemplo: P = {Los número naturales mayores que 3 y menores que 9} Se puede escribir: P = {x / x ∈ ℕ ∧ 3 < x < 9}

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Indica el número de elementos diferentes que posee un conjunto. Se denota por n(A) y se lee "cardinal de A".

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión

Sean los conjuntos A y B. Si todos los elementos de A son también elementos del conjunto B, decimos que "el conjunto A está incluido en B". Se denota por $A \subset B$.

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
M = {4; 5; 6}   y   N = {4; 5; 6; 7}
se tiene: $M \subset N$
se lee: "M está incluido en N".

Igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales cuando ambos poseen los mismos elementos. Se denota A = B.

Ejemplo:
Dados los conjuntos A = {a; c; l} y B = {c; l; a}; se observa que A = B.

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando uno de ellos está incluido en el otro, es decir:
A es comparable con B $\Leftrightarrow$ $A \subset B \vee B \subset A$

Ejemplo:
Sean los conjuntos: A = {x / x es un mamífero}; B = {x / x es un cuy}
Sabemos que $B \subset A$ (todo cuy es mamífero) pero $A \not\subset B$ (no todo mamífero es un cuy). Por lo tanto, A y B son conjuntos comparables.

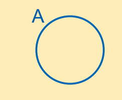
> **Nota**
> - Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.
> - La no inclusión se denota: $\not\subset$

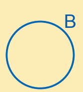
Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no poseen elementos comunes.

Ejemplo:
Sean los conjuntos: A = {x / x es par} y B = {x / x es impar}
Se observa que A y B no tienen elementos comunes. Por lo tanto, A y B son disjuntos.

> **Atención**
> Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Gráficamente se representan:





CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto vacío. Es aquel conjunto que no posee elementos. Se denota por ∅ o { }.

Ejemplo: $A = \{ x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 3\} = \varnothing$

Conjunto unitario. Es aquel conjunto que consta de un solo elemento.

Ejemplo: $P = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 9\} = \{3\}$

Conjunto universal. Es aquel conjunto de referencia para estudiar otros conjuntos incluidos en él. Se denota generalmente por U.

Ejemplo:
U = {x / x es un perro}
P = {x / x es un pastor alemán} $\Rightarrow$ U es el conjunto universal para el conjunto P.

> **Nota**
> $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Conjunto de conjuntos. También llamado familia de conjuntos. Es aquel conjunto cuyos elementos son todos conjuntos.

Ejemplo: C = {{2; 3}; {3}; {1; 2}; {6}; ∅}

> **Nota**
> - El vacío ∅ es subconjunto de todo conjunto.
> - Al conjunto U, generalmente se le representa de manera gráfica por un rectángulo.

Conjunto potencia. Sea un conjunto A. El conjunto potencia de A es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles que posee el conjunto A. Se denota: $P(A) = \{x / x \subset A\}$

Ejemplo:
Sea el conjunto A = {1; 2}, entonces: P(A) = {ϕ; {1}; {2}; {1; 2}}, se observa que $n[P(A)] = 4 = 2^2$.

En general, para cualquier conjunto A, se cumple: $n[P(A)] = 2^{n(A)}$

> **Observación**
> A cualquier subconjunto de A que no sea igual a este, se denomina **subconjunto propio de A**.
> Del ejemplo:
> ∅; {1}; {2} son subconjuntos propios de A.
> También observamos que A tiene $2^2 - 1$ subconjuntos propios.
> En general, para cualquier conjunto A se cumple:
> $\text{n.º de subconjuntos propios de A} = 2^{n(A)} - 1$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión (U)

Dados los conjuntos A y B, la unión de ellos es el conjunto formado por los elementos del conjunto A o los elementos del conjunto B.

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Representación gráfica

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
(A, B superpuestos)	(A, B separados)	(A dentro de B) $A \cup B = B$

Nota

- Sean A, B y C tres conjuntos disjuntos. Se cumple:
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$
- Para dos conjuntos cualesquiera A y B, se cumple:
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- Para dos conjuntos cualesquiera A y B, se cumple:
  $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$

Recuerda

- Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces:
  $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $B \subset A^C \iff$ A y B son disjuntos.
  $B^C \subset A^C \iff A \subset B$
- $U^C = \varnothing$
  $\varnothing^C = U$

Atención

Los conjuntos $(A - B)$; $(A \cap B)$ y $(B - A)$ son mutuamente disjuntos.

Observación

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.

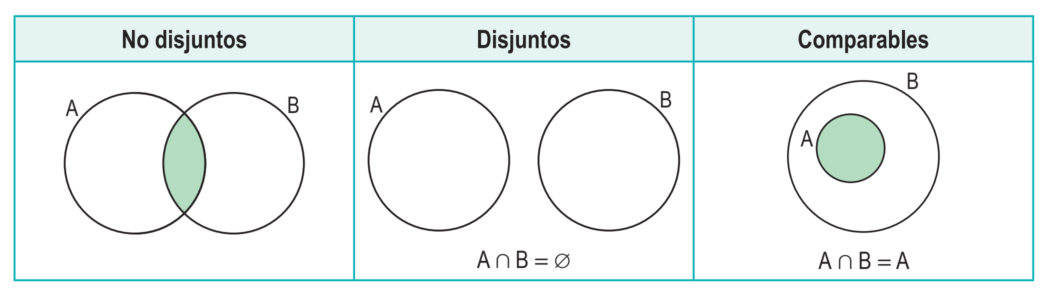
- Si $A \subset B$, entonces:
  $A \triangle B = B - A$
- Si A y B son disjuntos; entonces:
  $A \triangle B = A \cup B$

Intersección (∩)

Dados los conjuntos A y B, la intersección de ellos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B.

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Representación gráfica

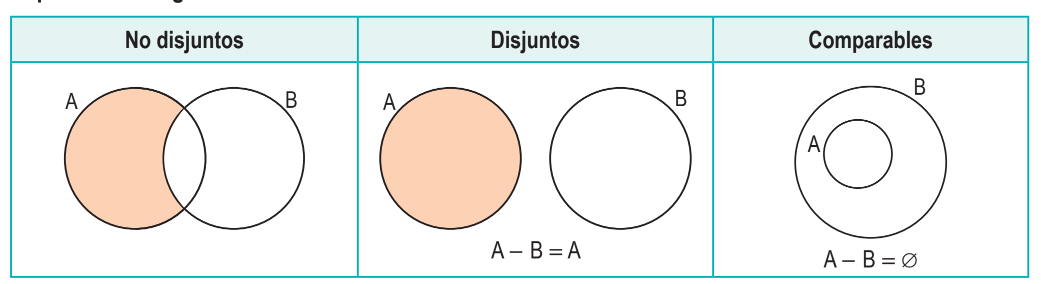


Diferencia (–)

Dados los conjuntos A y B, la diferencia de ellos es aquel conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Representación gráfica



Diferencia simétrica (△)

Dados los conjuntos A y B, la diferencia simétrica es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o B pero no a ambos.

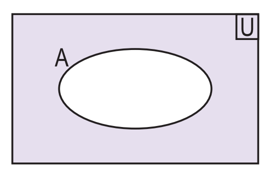
$$A \triangle B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

Representación gráfica

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B	A B
	$A \triangle B = A \cup B$	$A \triangle B = B - A$

Complemento de un conjunto (A^c o A')

Dado un conjunto A, el complemento de A es el conjunto formado por los elementos del universo que no están en A.



$$A' = A^c = \{x / x \notin A\}$$

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Idempotencia	Conmutativa	Asociativa	Distributiva
$A \cup A = A$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \triangle A = A$	$A \triangle B = B \triangle A$	$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$	

Problemas resueltos

1 Sea el conjunto:
$S = \{\varnothing; a; \{a\}\}$
Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- $a \in S$
- $\{a\} \subset S$
- $\{\varnothing\} \in S$
- $\{a\} \in S$
- $a \subset S$
- $\varnothing \in S$

Resolución:
- $a \in S$ (verdadero)
  a es un elemento del conjunto S.
- $\{a\} \in S$ (verdadero)
  {a} es un elemento del conjunto S.
- $\{a\} \subset S$ (verdadero)
  a es un elemento del conjunto S, entonces {a} es un subconjunto de S.
- $a \subset S$ (falso)
  a es un elemento del conjunto S, entonces la relación que corresponde debe ser de pertenencia.
- $\{\varnothing\} \in S$ (falso)
  $\{\varnothing\}$ es un subconjunto del conjunto S, entonces la relación correcta es: $\{\varnothing\} \subset S$
- $\varnothing \in S$ (verdadero)
  $\varnothing$ es un elemento del conjunto S.

2 Sean los conjuntos A y B tales que:
$A = \{\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{\ \}\}; \{\ \}\}$ y $[2^{n(A)}]^{n(B)} + [2^{n(B)}]^{n(A)} = 8192$
Halla n(B).

Resolución:
Sabemos que: $\varnothing = \{\ \} \Rightarrow \{\varnothing\} = \{\{\ \}\}$
Luego:
$A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\} \Rightarrow n(A) = 2$ ... (I)
Además:
$[2^{n(A)}]^{n(B)} + [2^{n(B)}]^{n(A)} = 8192$
$2^{n(A)\,.\,n(B)} + 2^{n(B)\,.\,n(A)} = 2^{13}$
$2 \times 2^{n(A) \times n(B)} = 2^{13}$
$2^{n(A) \times n(B)} = \dfrac{2^{13}}{2}$
$2^{n(A) \times n(B)} = 2^{12} \Rightarrow n(A) \times n(B) = 12$ ...(II)
De (I) y (II):
$2 \times n(B) = 12$ $\therefore$ $n(B) = 6$

3 Si los conjuntos $\{(2n + 1)^n; m^2 + m\}$ y $\{12; 25\}$ son iguales, halla m^n. Además $\{m; n\} \subset \mathbb{N}$.

Resolución:
Por dato:
$\{(2n + 1)^n; m^2 + m\} = \{12; 25\}; \{m; n\} \subset \mathbb{N}$
La expresión 2n+1 es un número impar, y si elevamos esta cantidad a cualquier exponente seguirá siendo un número impar.
Luego:
- $(2n + 1)^n = 25$
  $(2n + 1)^n = 5^2$
  $(2n + 1)^n = [2(2) + 1]^2$
  $\Rightarrow n = 2$
- $m^2 + m = 12$
  $m^2 + m = 3^2 + 3$
  $\Rightarrow m = 3$

Nos piden:
$m^n = 3^2 = 9$

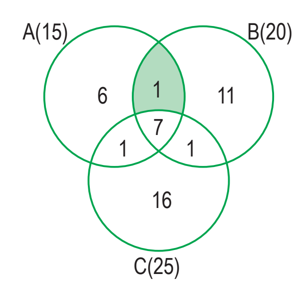
4 Si el conjunto A es unitario, halla $a \times b \times c$.
$A = \{a + b;\ b + c; a + c; 8\}$

Resolución:
Por dato, A es unitario, entonces:
- $a + b = b + c$
  $a = c$
- $a + b = a + c$
  $b = c$

Entonces:
$a = b = c$ ...(I)
Además, se cumple:
$a + b = b + c = a + c = 8$ ...(II)
De (I) y (II):
$2a = 8$
$a = 4 \Rightarrow b = c = 4$
Nos piden:
$a \times b \times c = 4 \times 4 \times 4 = 64$

5 Sean A, B y C tres conjuntos, donde:
$n(A) = 15; n(B) = 20; n(C) = 25$
Además:
$n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B) - 1 = n(A \cap C) - 1 = n(B \cap C) - 1 = 7$
Halla: $n[(A \cap B) - C]$

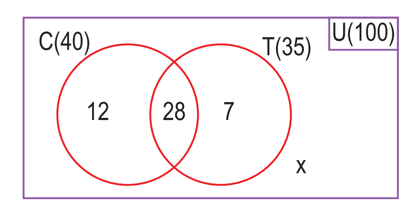
Resolución:
Expresamos gráficamente:



La región sombreada representa $(A \cap B) - C$.
$\therefore$ $n[(A \cap B) - C] = 1$

6 De un grupo de 100 personas encuestadas, 40 van al cine, 35 van al teatro y 28 de los que van al cine van al teatro. ¿Cuántas personas no van al cine ni al teatro?

Resolución:
Representando gráficamente tenemos:



Luego:
$x = 100 - 12 - 28 - 7$
$x = 53$
$\therefore$ 53 personas no van al cine ni al teatro.

NUMERACIÓN

Atención

Las cifras que emplearemos para la formación de numerales son:
0; 1; 2; ...

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que estudia las leyes y convenciones sobre la representación de los números.

CONCEPTOS PREVIOS

Número. Es un ente o abstracción matemática que nos da una idea de cantidad.
Numeral. Es la representación de un número mediante símbolos.
Cifra. Son símbolos que convencionalmente se utilizan en la formación de los numerales.

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de principios, reglas y convenios que rigen la formación y representación de números con una cantidad limitada de símbolos (cifras o dígitos).

PRINCIPIOS DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Observación

En el ejemplo, diremos que en el numeral 59 643; la cifra 5 es de orden 4 y 1.^{er} lugar; la cifra 9 es de orden 3 y 2.° lugar; la cifra 6 es de orden 2 y 3.^{er} lugar; la cifra 4 es de orden 1 y 4.° lugar; la cifra 3 es de orden 0 y 5.° lugar.

- **Orden y lugar.** Toda cifra que forma parte de un numeral tiene asociado un orden y un lugar.
- **Orden.** Se cuenta de derecha a izquierda a partir de cero.
- **Lugar.** Se cuenta de izquierda a derecha a partir de uno.

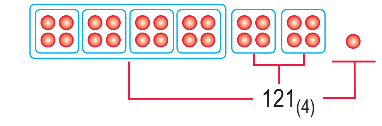
Orden →	4	3	2	1	0
	5	9	6	4	3
Lugar →	1	2	3	4	5

Base. Todo sistema de numeración tiene una base que es un número natural mayor que la unidad, el cual nos indica la cantidad de unidades necesarias y suficientes de un orden cualquiera para formar una unidad del orden inmediato superior.

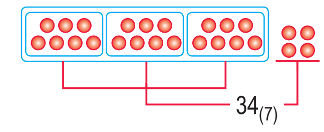
Ejemplo:
Expresar 24 unidades en las bases 4 y 7.

Resolución:

- En base 4:



- En base 7:



Observamos que: $25 = 121_{(4)} = 34_{(7)}$

Cifra. Toda cifra que conforma un numeral, es menor que la base.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN MÁS UTILIZADOS

Recuerda

En un sistema de numeración de base n, la cifra máxima será (n – 1).

Base	Nombre	Cifras que utiliza
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)

Debemos considerar que:

- En una igualdad de numerales, a mayor numeral aparente le corresponde menor base y a menor numeral aparente le corresponde mayor base.
- Las cifras permitidas en la base n son: 0; 1; 2; ...; (n – 1)
- En número de cifras que se puede utilizar para la formación de numerales en cierta base, es igual a la base.

Valores de las cifras. Toda cifra que forma parte de un numeral tiene dos valores:

- **Valor relativo (VR).** Es el valor que representa la cifra por la posición u orden que ocupa dentro del número.
- **Valor absoluto (VA).** Es el valor que representa la cifra por la forma que tiene.

Ejemplo:
Sea el numeral $4236_{(7)}$; entonces:

VA(6) = 6	$VR(6) = 6 \times 7^0$
VA(3) = 3	$VR(3) = 3 \times 7^1$
VA(2) = 2	$VR(2) = 2 \times 7^2$
VA(4) = 4	$VR(4) = 4 \times 7^3$

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Cada cifra de un numeral puede ser representada por una letra minúscula; todas ellas cubiertas por una barra horizontal, para distinguirlas de las expresiones algebraicas.

Ejemplos:

- $\overline{ab}_{(n)}$: representa cualquier número de dos cifras en base n.
- $\overline{abc}$: representa cualquier número de tres cifras en base 10.
- $\overline{ab4}_{(6)}$: representa cualquier número de tres cifras en base 6 que termina en 4.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Todo numeral se puede descomponer como un polinomio, es decir, como la suma de los valores relativos de las cifras que conforman dicho numeral.

Ejemplos:

- Base 10
  $5479 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9$
- Base 4
  $2031_{(4)} = 2 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$
- Base 7
  $235_{(7)} = 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$
- Base 8
  $4523_{(8)} = 4 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3$

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO DE UNA BASE A OTRA

De base n a base 10		De base 10 a base n
Ejemplo: Convertir $435_{(6)}$ a base 10.		Ejemplo: Convertir 1723 a base 8.
Por descomposición polinómica	**Por el método de Ruffini**	Resolución:
$435_{(6)} = 4 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5$ $435_{(6)} = 144 + 18 + 5$ $435_{(6)} = 167$	4 3 5 6 | 24 162 4 27 167 $435_{(6)} = 167$	1723 | 8 1720 215 | 8 3 208 26 | 8 7 24 3 2 $1723 = 3273_{(8)}$

PROPIEDADES

Numeral de cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{\text{k cifras}} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1z}_{(n)}}}}} = n + a + b + c + \ldots + z$$

Nota

$\overset{+}{\underset{-}{512}}_{(7)} = \overset{-}{\underset{+}{312}}_{(9)}$

Recuerda

Debes tener en cuenta que:

- Toda expresión entre paréntesis representará una cifra.
- La primera cifra de un numeral debe ser distinta de cero.
- Las letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, salvo que lo indiquen.

Nota

Numeral capicúa. Es aquel número cuyas cifras equidistantes son iguales.

Ejemplos:
$1221_{(4)}$; $\overline{aba}_{(6)}$; 23432; $\overline{axxa}$

Atención

La descomposición polinómica también se puede realizar por bloques.

Ejemplos:

$\overline{mnmn}_{(k)} = \overline{mn}_{(k)} \times k^2 + \overline{mn}_{(k)}$

$\overline{aaabb}_{(3)} = \overline{aaa}_{(3)} \times 3^2 + \overline{bb}_{(3)}$

$232323_{(5)} = 23_{(5)} \times 5^4 + 23_{(5)} \times 5^2 + 23_{(5)}$

Observación

Para expresar un numeral de base $n \neq 10$ en base $m \neq 10$; primero se convierte a base 10; y el resultado se convierte a base m.

Nota

Caso particular:

$$\text{"m" veces}\left\{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_{(n)}}}}\right. = n + ma$$

Problemas resueltos

1 Calcula $a^2 + b^2$ si: $\overline{17ab} = 101 \times \overline{ab}$

Resolución:

Descomponiendo por bloques, tenemos:

$\overline{17ab} = 101 \times \overline{ab}$

$1700 + \overline{ab} = 101 \times \overline{ab}$

$1700 = 101\overline{ab} - \overline{ab}$

$1700 = 100\overline{ab}$

$17 = \overline{ab}$

Nos piden:

$a^2 + b^2 = 1^2 + 7^2 = 50$

2 Halla x si:

$54_{(x)} - 31_{(x)} = 19$

Resolución:

Por descomposición polinómica:

$54_{(x)} - 31_{(x)} = 19$

$5x + 4 - (3x + 1) = 19$

$2x + 3 = 19$

$2x = 16$

$\therefore x = 8$

3 Si se cumple $105_{(n)} = 321_{(5)}$; calcula $\sqrt{n} + 1$.

Resolución:

Expresamos en base 10:

$1 \times n^2 + 5 = 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1$

$n^2 + 5 = 75 + 10 + 1$

$n^2 = 81$

$\Rightarrow n = 9$

Nos piden:

$\sqrt{n} + 1 = \sqrt{9} + 1$

$= 3 + 1$

$= 4$

4 Halla $\frac{b + c}{a}$; si: $\overline{abc}_{(7)} = 53$

Resolución:

Expresamos 53 en base 7:

53	7	
49	7	7
4	7	1
	0	

Luego:

$\overline{abc}_{(7)} = 53 = 104_{(7)}$

$\Rightarrow a = 1; b = 0; c = 4$

Nos piden:

$\frac{b + c}{a} = \frac{0 + 4}{1} = 4$

5 Representa correctamente el numeral N en base 7; si $0 < a < c < 6$.

$N = a \times 7^6 + 49 + 3 \times 7^4 + c \times 7^5$

Resolución:

Por dato, a y c son cifras positivas menores que 6.

Entonces:

$N = a \times 7^6 + c \times 7^5 + 3 \times 7^4 + 0 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 0 \times 7 + 0$

$N = \overline{ac30100}_{(7)}$

6 Un número escrito en la base 3 y 8 tiene la forma $\overline{pqpqqpr}$ y 1457 respectivamente. Calcula p + q + r.

Resolución:

Del enunciado se tiene:

$\overline{pqpqqpr}_{(3)} = 1457_{(8)}$

Expresando en base 10 tenemos:

$1457_{(8)} = 1 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = 185$

Pasamos a base 3:

815	3					
813	271	3				
2	270	90	3			
	1	90	30	3		
		0	30	10	3	
			0	9	3	3
				1	3	1
					0	

Luego:

$1010012_{(3)} = \overline{pqpqqpr}_{(3)} \Rightarrow p + q + r = 1 + 0 + 2 = 3$

7 Halla m, si:

$\overline{n61}_{(m)} = \overline{n15}_{(8)}$

Resolución:

Observamos que:

$\overset{+}{\overline{n61}}_{(m)} = \overset{-}{\overline{n15}}_{(8)}$
$\quad - \qquad\quad +$

Luego:

$6 < m < 8$

$\Rightarrow m = 7$

8 Halla el valor de a + b, si se cumple que:

$\overline{abbb}_{(6)} = \overline{5ba}_{(8)}$

Resolución:

Si descomponemos polinómicamente ambos miembros:

$a \times 6^3 + b \times 6^2 + b \times 6 + b = 5 \times 8^2 + b \times 8 + a$

$216a + 36b + 6b + b = 320 + 8b + a$

$215a + 35b = 320$

$43a + 7b = 64$

$\downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 3$

Luego: $a + b = 1 + 3 = 4$

9 Un ganadero utiliza cierto sistema de numeración para administrar su ganado.

En sus apuntes lleva escrito:

- n.° de toros = 24
- n.° de vacas = 32
- Total de cabezas = 100

¿Qué sistema de numeración está utilizando?

Resolución:

Sea n el sistema de numeración que utiliza el ganadero:

$\Rightarrow 24_{(n)} + 32_{(n)} = 100_{(n)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$2n + 4 + 3n + 2 = n^2$

$n^2 - 5n - 6 = 0$

$n \quad -6$

$n \quad +1$

$\Rightarrow n = 6 \lor n = -1$

Pero como n es base, debe ser positiva.

$\therefore n = 6$

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

ADICIÓN

Es la operación que consiste en agrupar un conjunto de cantidades homogéneas llamadas sumandos, obteniendo así otra cantidad denominada suma. Presenta la siguiente forma:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = S$$

Sumandos: $A_1, A_2, ..., A_n$ — Suma: S

Ejemplo:

Si $a + b = 6$, calcula $S = \overline{a1} + \overline{ba} + \overline{2b}$.

Resolución:

Al ordenar verticalmente los términos de la adición tenemos:

$$\begin{array}{r} \overline{a1}\ + \\ \overline{ba} \\ \overline{2b} \\ \hline 87 \end{array}$$

En el orden 0: $1 + \underbrace{a + b}_{6} = 1 + 6 = 7$

En el orden 1: $\underbrace{a + b}_{6} + 2 = 6 + 2 = 8$

Es decir: $S = 87$

SUSTRACCIÓN

Es la operación inversa a la adición, que consiste en calcular la diferencia entre dos números llamados minuendo y sustraendo. Presenta la siguiente forma:

$$M - S = D$$

D ← Diferencia; S ← Sustraendo; M ← Minuendo

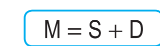
Ejemplo:

En la sustracción: $849 - 721 = 128$, se observa que: $849 = 128 + 721$

Propiedades

1. El minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia.

   $M = S + D$



2. La suma de los términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

   $M + S + D = 2M$

3. Si $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{pq}$, donde $a > b$, entonces:

   $p + q = 9$ $\quad$ $\overline{pq} = 9(a - b)$

4. Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$, donde $a > c$, entonces:

   $x + z = 9$ $\quad$ $y = 9$

   $\overline{xyz} = 99(a - c)$ $\quad$ $a - c = x + 1$

Complemento aritmético (CA)

Se define como la cantidad de unidades que le falta a un número entero positivo para ser igual a una unidad del orden inmediato superior, con respecto de su cifra de mayor orden.

Ejemplo:

Halla el CA de 57.

Resolución:

La cifra de mayor orden del número 57, corresponde a las decenas (orden 1), entonces tenemos que calcular la cantidad que le falta para completar una centena (orden inmediato superior: orden 2), es decir:

$CA(57) = 100 - 57 = 43$

En general :

Sea N un número de k cifras, entonces: $CA(N) = 10^k - N$

Nota

Propiedades de la adición en $\mathbb{Z}$

Clausura
$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}: a + b \in \mathbb{Z}$

Conmutativa
$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}: a + b = b + a$

Asociativa
$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}:$
$(a + b) + c = a + (b + c)$

Del elemento neutro aditivo
$\forall\ a \in \mathbb{Z}: a + 0 = 0 + a = a$

Del elemento inverso aditivo
$\forall\ a \in \mathbb{Z}: a + (-a) = 0$

Recuerda

Sumas notables

$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Observación

La propiedad 1 nos permitirá verificar si la sustracción ha sido efectuada correctamente.

Atención

Recuerda las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$

Clausura
$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}: a \times b \in \mathbb{Z}$

Conmutativa
$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}: a \times b = b \times a$

Asociativa
$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}:$
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Del elemento neutro multiplicativo
$\forall\ a \in \mathbb{Z}: a \times 1 = 1 \times a = a$

Del elemento inverso multiplicativo
$\forall\ a \in \mathbb{Z} - \{0\} : a \times a^{-1} = 1$

Distributiva
$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}:$
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Nota

- Si $\overline{abc} \times 7 = ...8 \Rightarrow c = 4$

  Si $\overline{abc} \times 4 = ...2 \Rightarrow c < \begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix}$
- (n.º impar) × (...5) = ...5

  (n.º par) × (...5) = ...0
- $n(n + 1) = < \begin{matrix} ...0 \\ ...2 \\ ...6 \end{matrix}$

Observación

De los ejemplos, observamos que al dividir dos números enteros la división podrá ser exacta o inexacta.

Método práctico para hallar el CA de un número

1. Cuando el número termina en cifras significativas, se resta la última cifra de 10 y los demás de 9. Las cifras obtenidas forman parte del CA que buscamos.

$$CA(\overline{abcde}) = \overline{(9-a)\ (9-b)\ (9-c)\ (9-d)\ (10-e)}$$

   Ejemplo:

   $CA(84\ 316) = \overline{(9-8)(9-4)(9-3)(9-1)(10-6)} = 15\ 684$

2. Cuando el número termina en cero(s), se repite el procedimiento anterior a partir de la última cifra significativa, y colocamos los ceros que al final tenía el número inicial.

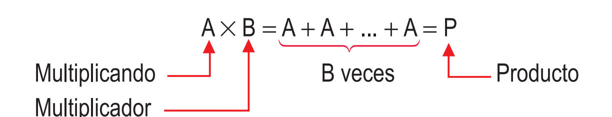
$$CA(\overline{abcd000}) = \overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)000}$$

   Ejemplo:

   $CA(45\ 200) = \overline{(9-4)(9-5)(10-2)00} = 54\ 800$

MULTIPLICACIÓN

Es la operación que consiste en adicionar abreviadamente una cantidad llamada **multiplicando**, tantas veces como lo indica otra cantidad llamada **multiplicador**. Al resultado de la operación se le llama **producto.**

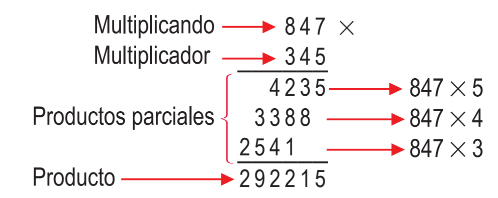


Ejemplo:

$45 \times 7 = 45 + 45 + 45 + 45 + 45 + 45 + 45 = 315$

Multiplicando: 45; Multiplicador: 7; Producto: 315

Algoritmo de la multiplicación



Se verifica: $847 \times 345 = 847 \times (300 + 40 + 5) = 847 \times 300 + 847 \times 40 + 847 \times 5 = 292\ 215$

DIVISIÓN

Es la operación matemática inversa a la multiplicación, en la que dados dos números enteros positivos cualesquiera, llamados **dividendo** y **divisor** se obtiene un tercer número llamado **cociente.**

Ejemplos:

- 24 | 8 ; 24 → 3 ; residuo - -

  $24 = 8 \times 3$
- 38 | 7 ; 35 → 5 ; 3 ← Residuo

  $38 = 7 \times 5 + 3$

Clases de división

División exacta

Es aquella división en la que no se obtiene un residuo.

D | d ; q $\Rightarrow$ $\boxed{D = d \times q}$

Ejemplo: 26 | 13 ; 26 → 2 ; - - $\Rightarrow 26 = 13 \times 2$

División inexacta

Es aquella división en la cual se va a obtener un nuevo término llamado **residuo**. A su vez se subclasifica en:

División inexacta por defecto	División inexacta por exceso
$\begin{array}{c\|c} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow D = d \times q + r$ Donde: D es el dividendo, d el divisor, q el cociente y r el residuo. Ejemplo: $\begin{array}{c\|c} 46 & 8 \\ \hline 40 & 5 \\ 6 & \end{array} \Rightarrow 46 = 8 \times 5 + 6$	$\begin{array}{c\|c} D & d \\ \hline r_e & q_e \end{array} \Rightarrow D = d \times q_e - r_e$ Donde: D es el dividendo, d el divisor, q_e el cociente por exceso y r_e el residuo por exceso. Ejemplo: $\begin{array}{c\|c} 46 & 8 \\ \hline 48 & 6 \\ 2 & \end{array} \Rightarrow 46 = 8 \times 6 - 2$

Propiedades de la división inexacta

1. $0 < \text{residuo} < d$
2. $r_{máximo} = d - 1$
   $r_{mínimo} = 1$
3. $r + r_e = d$
4. $q_e = q + 1$

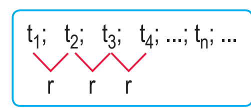
PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es un conjunto de números, ordenados de tal manera que la diferencia entre dos términos consecutivos es una cantidad constante llamada **razón aritmética.**

Ejemplos:

- 15; 19; 23; 27; ...
  +4 +4 +4
- 37; 39; 41; 43; ...
  +2 +2 +2
- 102; 108; 114; 120; ...
  +6 +6 +6

En general:



Donde: t_1 es el primer término; t_n el término enésimo; r es la razón y n el número de términos.

Elementos

1. Término general:
   $t_n = t_1 + r \times (n - 1)$
2. Razón:
   $r = t_n - t_{n-1}$
3. Número de términos:
   $n = \dfrac{t_n - t_1}{r} + 1$
4. Suma de términos:
   $S = \left(\dfrac{t_1 + t_n}{2}\right) \times n$

Conteo de cifras usadas en una progresión aritmética

Dado un número entero positivo N de k cifras. La cantidad de cifras que se utiliza al escribir todos los números enteros desde 1 hasta N, está dado por:

$$\text{Cantidad de cifras usadas} = (N + 1)k - \underbrace{11 \ldots 11}_{k \text{ cifras}}$$

MÉTODO COMBINATORIO

Sirve para determinar cuántos números de k cifras existen en base n. Para esto, se halla para cada cifra el número de valores que puede asumir en base **n.** El producto de estos valores nos da el número de combinaciones.

Ejemplo:
¿Cuántos números de 3 cifras existen en el sistema cuaternario?

Resolución:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c_{(4)} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ _ & \underline{3} & \underline{3} \\ \end{array}$$
$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

Por lo tanto, en el sistema cuaternario existen 48 números de 3 cifras.

Atención

Alteraciones de la división entera para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

Si: $\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & q \end{array}$

Entonces:

- $\begin{array}{c|c} D \times n & d \times n \\ \hline r \times n & q \end{array}$
- $\begin{array}{c|c} D + d & d \\ \hline & q + 1 \end{array}$

Recuerda

Para una progresión aritmética cuya cantidad de términos es impar se tiene:

$t_c = \dfrac{t_n + t_1}{2}$

Nota

Para la sucesión:
15; 19; 23; 27; ...; 95

Se tiene:
$r = 19 - 15 = 4$; $t_1 = 15$
$t_n = 15 + 4(n - 1) = 11 + 4n$
$\Rightarrow 95 = 11 + 4n$
$n = 21$

Luego:
$S = \left(\dfrac{15 + 95}{2}\right) \times 21 = 1155$

Observación

- Cuando aparezcan cifras repetidas o dependientes, solo se analiza una de ellas.
- Se debe tener en cuenta que la cifra de mayor orden en un numeral, es diferente de cero.

Problemas resueltos

1 Si: $x + y + z = 23$
Halla: $\overline{xxy} + \overline{zzx} + \overline{yyz}$

Resolución:
Ordenando los sumandos y utilizando el dato, se tiene:

$$\begin{array}{r} \small{②②} \\ x\ x\ y\ + \\ z\ z\ x \\ y\ y\ z \\ \hline 2\ 5\ 5\ 3 \end{array}$$

$\therefore\ \overline{xxy} + \overline{zzx} + \overline{yyz} = 2553$

2 Halla: $a \times b + c$
Si: $\overline{a7ab} + \overline{3c73} = 9027$

Resolución:

$$\begin{array}{r} ①① \\ a\,7\,a\,b\ + \\ 3\,c\,7\,3 \\ \hline 9\,0\,2\,7 \end{array}$$

$b + 3 = 7$
$\Rightarrow b = 4$
$a + 7 = ...2$
$\Rightarrow a = 5$
$1 + 7 + c = ...0$
$\Rightarrow c = 2$

$\therefore\ a \times b + c = 5 \times 4 + 2 = 22$

3 Halla la suma de las 3 últimas cifras de:
$3 + 33 + 333 + 3333 + ... + \underbrace{33...33}_{35\text{ cifras}}$

Resolución:
Ordenando los sumandos:

$$\left.\begin{array}{r} 3\ + \\ 3\ 3 \\ 3\ 3\ 3 \\ 3\ 3\ 3\ 3 \\ \vdots\quad \\ 3\ 3\ 3\ ...\ 3\ 3\ 3 \end{array}\right\}\text{35 sumandos}$$
$$\overline{...\ a\ b\ c}$$

$\underbrace{3 + 3 + 3 + ... + 3}_{35\text{ cifras}} = 3 \times 35 = 105$

Colocamos 5 y llevamos 10.
$\Rightarrow c = 5$

$\underbrace{10}_{\text{Llevo}} + \underbrace{3 + 3 + ... + 3}_{34\text{ cifras}} = 10 + 3 \times 34 = 112$

Colocamos 2 y llevamos 11.
$\Rightarrow b = 2$

$\underbrace{11}_{\text{Llevo}} + \underbrace{3 + 3 + ... + 3}_{33\text{ cifras}} = 11 + 3 \times 33 = 110$

Colocamos 0.
$\Rightarrow a = 0$
$\therefore\ a + b + c = 7$

4 Halla $(x + y)$, si:
$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6xy}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\ - \\ c\,b\,a \\ \hline 6\,x\,y \end{array}$$

Por propiedad:
$x = 9 \wedge 6 + y = 9$
$\Rightarrow y = 3$

$\therefore\ x + y = 12$

5 Si el minuendo es el triple de la diferencia, además el sustraendo es 32, halla el minuendo.

Resolución:
Sea la sustracción:
$M - S = D$

Reemplazando datos:
$3D - 32 = D$
$2D = 32$
$D = 16$

$\therefore\ M = 3D = 48$

6 Calcula: $a + b + c$
Si: $CA(\overline{abc}) = \overline{(a-1)(b+5)(c+2)}$

Resolución:
$CA(\overline{abc}) = \overline{(a-1)(b+5)(c+2)}$

$\overline{(9-a)(9-b)(10-c)} = \overline{(a-1)(b+5)(c+2)}$

$\Rightarrow\ 9 - a = a - 1 \Rightarrow a = 5$
$\Rightarrow\ 9 - b = b + 5 \Rightarrow b = 2$
$\Rightarrow 10 - c = c + 2 \Rightarrow c = 4$

$\therefore\ a + b + c = 11$

7 Halla el valor de: $a + b + c + d$
Si: $\overline{...abcd} \times 7 = ...2531$

Resolución:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 6\ \ 2\ \ 2\quad \\ ...\ a\ b\ c\ d\ \times \\ 7\ \ \\ \hline ...\ 2\ 5\ 3\ 1\ \ \end{array}$$

$7 \times d = ...1 \Rightarrow d = 3$
$7 \times c + 2 = ...3 \Rightarrow c = 3$
$7 \times b + 2 = ...5 \Rightarrow b = 9$
$7 \times a + 6 = ...2 \Rightarrow a = 8$

$\therefore\ a + b + c + d = 23$

8 Si: $m \times \overline{abc} = 1760$
$n \times \overline{abc} = 2464$
$p \times \overline{abc} = 2112$

Calcula: $\overline{mnp} \times \overline{abc}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\times \\ \overline{mnp} \\ \hline 2112 \longrightarrow p\times\overline{abc} \\ 2464 \longrightarrow n\times\overline{abc} \\ 1760 \longrightarrow m\times\overline{abc} \\ \hline 202752 \end{array}$$

$\therefore\ \overline{mnp}\times\overline{abc} = 202\,752$

9 En una división inexacta el divisor es 17 y el cociente 25. Halla el dividendo si el residuo es máximo.

Resolución:

Se tiene: $d = 17$; $q = 25$ y $r_{máximo} = d - 1 = 16$
Reemplazando estos datos en la fórmula:
$D = d \times q + r = 17 \times 25 + 16$
$\therefore D = 441$

10 La suma de los cuatro términos de una división es 175, el cociente es 5 y el residuo 4. Calcula el divisor.

Resolución:

$D + d + q + r = 175 \ \wedge\ \begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 4 & 5 \end{array}$

Reemplazando los valores:

$(5d + 4) + d + 5 + 4 = 175$
$6d + 13 = 175$
$6d = 162$
$\Rightarrow d = 27$

Por lo tanto, el divisor es: 27

11 La suma de dos números es 426 y al dividirlos se obtiene 15 como cociente y 10 como residuo. Halla el mayor de ellos.

Resolución:
Sean los números: a y b

Entonces:
$a + b = 426$ ...(1)
$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline 10 & 15 \end{array} \Rightarrow a = 15b + 10$ ...(2)

Reemplazando **a** de la ecuación (2) en la ecuación (1):
$(15b + 10) + b = 426$
$16b + 10 = 426$
$16b = 416$
$\Rightarrow b = 26$
Reemplazando este valor en la ecuación (1), se tiene: $a = 400$
Por lo tanto, el número mayor es: 400

12 En una división el residuo por defecto es 17, el residuo por exceso es 11 y el cociente por exceso es 13. Calcula el dividendo.

Resolución:
Se tienen los datos:
$r = 17$; $r_e = 11$ y $q_e = q + 1 = 13$
$\Rightarrow d = r + r_e = 28$ y $q = 12$

$\begin{array}{l|l} D & 28 \\ \hline 17 & 12 \end{array}$

$D = 28 \times 12 + 17$
$D = 336 + 17 \Rightarrow D = 353$

Por lo tanto, el dividendo es: 353

13 ¿Cuántos números impares de 3 cifras existen en el sistema decimal?

Resolución:
Considerando los valores de las cifras de acuerdo a la base:

a	b	c
↓	↓	↓
1	0	1
2	1	3
3	2	5
⋮	⋮	7
9	9	9

$9 \times 10 \times 5 = 450$ números

Nota: para que un número sea impar, la última cifra debe ser impar.
Por lo tanto, existen 450 números impares de 3 cifras.

14 ¿Cuántas cifras (o tipos de imprenta) se han empleado al enumerar las primeras 746 páginas de un libro?

Resolución:
Páginas numeradas: 1; 2; 3; ...; 746

Último término: $N = 746$ y la cantidad total de sus cifras: $k = 3$
La cantidad total de cifras empleadas será:
$Cc = k(N + 1) - \underbrace{111...1}_{k\ cifras}$

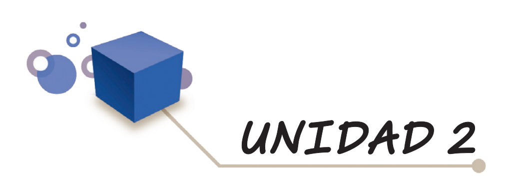
$Cc = 3(746 + 1) - 111$
$Cc = 2130$ cifras
Por lo tanto, el total de cifras empleadas es 2130.

15 Calcula la suma de las cifras de un número de 2 dígitos, sabiendo que su CA es igual al producto de sus cifras.

Resolución:
Sea el numeral: $\overline{ab}$

$CA(\overline{ab}) = a \times b$
$100 - \overline{ab} = a \times b$
$100 - (10a + b) = ab$
$100 = 10a + b + ab$
$100 = 10\underset{\downarrow\ 9}{a} + b\,(1 + \underset{\downarrow\ 9}{a})$

$\Rightarrow b = 1$, luego: $a + b = 9 + 1 = 10$

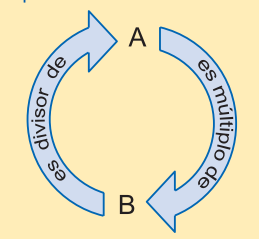


UNIDAD 2

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

Observación

Si A es divisible por B, también se puede decir:



Si 20 es múltiplo de 4, entonces 4 es divisor de 20. ¿Te das cuenta?

DEFINICIÓN

Es parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe tener un número para que sea divisible por otro.

DIVISIBILIDAD

Se dice que A es divisible por B, si al dividir A entre B el cociente es entero y el residuo cero.

$$\text{A es divisible por B} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline 0 & q \end{array} \qquad \text{Donde: } A \in \mathbb{Z},\ B \in \mathbb{Z}^+,\ q \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \Rightarrow$ 24 es divisible por 6.
- $\begin{array}{r|l} -30 & 5 \\ \hline 0 & -6 \end{array} \Rightarrow$ –30 es divisible por 5.

MULTIPLICIDAD

Un número es múltiplo de otro número entero positivo, si es el resultado de multiplicar dicho número por otro número entero cualquiera.

$$\text{A es múltiplo de B} \Leftrightarrow A = B \times K \qquad \text{Donde: } A \in \mathbb{Z},\ B \in \mathbb{Z}^+,\ K \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- $35 = 5 \times 7 \Rightarrow$ 35 es múltiplo de 5.
- $48 = 3 \times 16 \Rightarrow$ 48 es múltiplo de 3.

Notación:

Para expresar que A es múltiplo de B escribiremos:

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Observaciones:

a) Los divisores de un número forman un conjunto finito, pero los múltiplos de un número forman un conjunto infinito. Por ejemplo:

35 → Divisores de 35 = {1; 5; 7; 35}
35 → Múltiplos de 35 = {...; –70; –35; 0; 35; 70; ...}

b) Si el número A no es múltiplo de B, entonces A se puede representar de la siguiente manera:

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d = \overset{\circ}{B} - r_e \qquad \text{Donde: } r_d + r_e = B$$

Ejemplo:

Como $23 \neq \overset{\circ}{5}$

$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \Rightarrow 23 = 5 \times 4 + 3$; $23 = \overset{\circ}{5} + 3$

$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline 2 & 5 \end{array} \Rightarrow 23 = 5 \times 5 - 2$; $23 = \overset{\circ}{5} - 2$

c) Si el producto de dos números es múltiplo de n y uno de ellos no tiene ningún divisor común diferente de la unidad con n, entonces el otro es múltiplo de n.

Ejemplos:

- $2 \times a = \overset{\circ}{7} \Rightarrow a = \overset{\circ}{7}$
- $5 \times a = \overset{\circ}{3} \Rightarrow a = \overset{\circ}{3}$

Recuerda

- La unidad es divisor de todo número entero, por lo cual recibe el nombre de divisor universal.
- El cero es múltiplo de todo número entero.

d) Si A es múltiplo de B, entonces es múltiplo de cada uno de los divisores de B.

Ejemplos:

- Si $A=\overset{\circ}{6}$, entonces $\begin{cases} A=\overset{\circ}{1} \\ A=\overset{\circ}{2} \\ A=\overset{\circ}{3} \\ A=\overset{\circ}{6} \end{cases}$
- Si $A=\overset{\circ}{15}$, entonces $\begin{cases} A=\overset{\circ}{1} \\ A=\overset{\circ}{3} \\ A=\overset{\circ}{5} \\ A=\overset{\circ}{15} \end{cases}$

e) Si A es múltiplo de B y también A es múltiplo de C, entonces A es múltiplo del mínimo común múltiplo de B y C.

$$\text{Si } A=\overset{\circ}{B} \wedge A=\overset{\circ}{C} \Rightarrow A=\overset{\circ}{\overline{MCM(A;C)}}$$

Ejemplo:

$$A=\overset{\circ}{10} \wedge A=\overset{\circ}{6} \Rightarrow A=\overset{\circ}{\overline{MCM(10;6)}}$$
$$A=\overset{\circ}{30}$$

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

1. La adición o sustracción de múltiplos de un mismo número siempre es igual a un múltiplo del mismo número. Así tenemos:

$$\overset{\circ}{n}+\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n} \qquad \overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$$

Ejemplos:

- $\underbrace{24}_{\overset{\circ}{2}}+\underbrace{6}_{\overset{\circ}{2}}=\underbrace{30}_{\overset{\circ}{2}}$
- $\underbrace{15}_{\overset{\circ}{3}}-\underbrace{6}_{\overset{\circ}{3}}=\underbrace{9}_{\overset{\circ}{3}}$
- $\underbrace{15}_{\overset{\circ}{5}}-\underbrace{10}_{\overset{\circ}{5}}=\underbrace{5}_{\overset{\circ}{5}}$

2. La multiplicación de un múltiplo de n por un entero, da como producto un múltiplo de n.

$$\overset{\circ}{n}\times k=\overset{\circ}{n}, \; k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- $\underbrace{6}_{\overset{\circ}{3}}\times 5=\underbrace{30}_{\overset{\circ}{3}}$
- $\underbrace{14}_{\overset{\circ}{7}}\times 2=\underbrace{28}_{\overset{\circ}{7}}$
- $\underbrace{10}_{\overset{\circ}{5}}\times 7=\underbrace{70}_{\overset{\circ}{5}}$

3. Si a un múltiplo de n, se eleva a una potencia entera y positiva, el resultado será un múltiplo de n.

$$(\overset{\circ}{n})^k=\overset{\circ}{n}, \; k\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

- $\underbrace{(25)^2}_{(\overset{\circ}{5})^2}=\underbrace{625}_{\overset{\circ}{5}}$
- $\underbrace{(4)^3}_{(\overset{\circ}{2})^3}=\underbrace{64}_{\overset{\circ}{2}}$
- $\underbrace{(3)^2}_{(\overset{\circ}{3})^2}=\underbrace{9}_{\overset{\circ}{3}}$

DIVISIBILIDAD APLICADA AL BINOMIO DE NEWTON

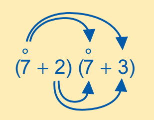
Dado: a > 0; r y k enteros, se cumple:

$$(\overset{\circ}{a}+r)^k=\overset{\circ}{a}+r^k$$

Ejemplos:

- $(\overset{\circ}{9}+2)^5=\overset{\circ}{9}+2^5$
- $(\overset{\circ}{17}+3)^2=\overset{\circ}{17}+3^2$
- $(\overset{\circ}{13}-2)^3=\overset{\circ}{13}+(-2)^3=\overset{\circ}{13}-2^3$
- $(\overset{\circ}{11}-2)^2=\overset{\circ}{11}+(-2)^2=\overset{\circ}{11}+2^2$

Recuerda



$(\overset{\circ}{7}+2)(\overset{\circ}{7}+3)$

$=\overset{\circ}{7}+\overset{\circ}{7}\times 3+2\times\overset{\circ}{7}+2\times 3$

$=\overset{\circ}{7}+2\times 3$

En general:

$$(\overset{\circ}{n}+r_1)(\overset{\circ}{n}+r_2)=\overset{\circ}{n}+r_1\times r_2$$

Atención

Si b > 0, entonces:

$$(-b)^k=\begin{cases} b^k, \text{ si k es par} \\ -b^k, \text{ si k es impar} \end{cases}$$

Ejemplo:

$(-3)^2=3^2=9$

$(-2)^5=-2^5=-32$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son reglas que permiten determinar si un número es divisible por otro, en caso contrario se podrá hallar el residuo que dejaría al dividirlos.

Divisibilidad por 2 $\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$ Ejemplo: Si $\overline{mnp(3a)} = \overset{\circ}{2} \wedge a > 0$, halla **a**. $3 \, . \, a = \overset{\circ}{2} \Rightarrow a = \overset{\circ}{2}$ ∴ El único valor que puede tomar a es 2.	**Divisibilidad por 5** $\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{5} \Rightarrow e = 0 \vee 5$ Ejemplo: $\overline{a35a} = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow a = \overset{\circ}{5}$ Como $a \neq 0 \Rightarrow a = 5$
Divisibilidad por 4 $\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$ Ejemplo: $\overline{745m} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow \overline{5m} = \overset{\circ}{4}$ $\Rightarrow m = 2 \vee m = 6$	**Divisibilidad por 25** $\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25} \vee \overline{de} = 00$ Ejemplo: $\overline{4737m} = \overset{\circ}{25} \Rightarrow \overline{7m} = \overset{\circ}{25}$ $\Rightarrow m = 5$
Divisibilidad por 8 $\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$ Ejemplo: $\overline{753m} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow \overline{53m} = \overset{\circ}{8} = 536$ $\Rightarrow m = 6$	**Divisibilidad por 125** $\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$ Ejemplo: $\overline{7m50} = \overset{\circ}{125} \Rightarrow \overline{m50} = \overset{\circ}{125}$ $\Rightarrow \overline{m50} = 250 \vee \overline{m50} = 750$ $\Rightarrow m = 2 \vee m = 7$
Divisibilidad por 3 y 9 $\overline{abcde} = \overset{\circ}{3} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$ Ejemplo: $\overline{135a2} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow 1 + 3 + 5 + a + 2 = \overset{\circ}{9}$ $11 + a = \overset{\circ}{9}$ $\Rightarrow a = 7$	**Divisibilidad por 7** $\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{7} \Leftrightarrow (2d + 3e + f) - (2a + 3b + c) = \overset{\circ}{7}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 2 3 1 2 3 1 − + Ejemplo: $\overline{212m31} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 2m + 9 + 1 - (4 + 3 + 2) = \overset{\circ}{7}$ $2m + 1 = \overset{\circ}{7}$ $\Rightarrow m = 3$
Divisibilidad por 11 $\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{11} \Leftrightarrow (b + d + f) - (a + c + e) = \overset{\circ}{11}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ − + − + − + Ejemplo: $\overline{2\,2\,5\,6\,m} = \overset{\circ}{11} \Leftrightarrow (m + 5 + 2) - (2 + 6) = \overset{\circ}{11}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ $\quad m - 1 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow m = 1$ + − + − +	**Divisibilidad por 13** $\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{13}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 4 3 1 4 3 1 + − + Luego: $4a + 3b - c - 4d - 3e + f = \overset{\circ}{13}$
Divisibilidad por 33 ó 99	
$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{33} \Leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{33}$ Ejemplo: $\overline{11101m} = \overset{\circ}{33} \Rightarrow 11 + 10 + \overline{1m} = \overset{\circ}{33}$ $21 + \overline{1m} = \overset{\circ}{33}$ $\Rightarrow m = 2$	$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{99} \Leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{99}$ Ejemplo: $\overline{20344a} = \overset{\circ}{99} \Rightarrow 20 + 34 + \overline{4a} = \overset{\circ}{99}$ $54 + \overline{4a} = \overset{\circ}{99}$ $\Rightarrow a = 5$

Atención

Mario se olvidó del código de su tarjeta de crédito.
Solo recuerda que las 4 cifras cumplían:

- La cifra de 2.º lugar es 2.
- La cifra de orden 0 y orden 3 son iguales.
- Su código es múltiplo de 5 y 9.

Ayudemos a Mario.

Código: $\overline{a2ba}$

Como: $\overline{a2ba} = \overset{\circ}{5}$

$\Rightarrow a = 5$ ✓ $\vee$ $a = 0$ ✗

Además:

$\overline{52b5} = \overset{\circ}{9}$

$5 + 2 + b + 5 = \overset{\circ}{9}$

$12 + b = \overset{\circ}{9}$

$3 + b = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow b = 6$

Luego, el código de Mario es: 5265.

¡Lo logramos!

Problemas resueltos

1 Calcula a, si $\overline{a43} = \overset{\circ}{9}$.

Resolución:

$\overline{a43} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + 7 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow a = 2$

2 Calcula m, si $\overline{m092} = \overset{\circ}{13}$.

Resolución:

$\overline{m\,0\,9\,2} = \overset{\circ}{13} \Rightarrow 2 - m - 0 - 27 = \overset{\circ}{13}$

↓ ↓ ↓ ↓ $\quad -m - 25 = \overset{\circ}{13}$

1 4 3 1 $\quad m + 25 = \overset{\circ}{13}$

– + $\quad m + 12 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow m = 1$

3 Si $\overline{5m(m+1)(m+2)} = \overset{\circ}{11}$, calcula m.

Resolución:

$\overline{5m(m+1)(m+2)} = \overset{\circ}{11}$

–+ – +

Entonces:

$m + (m + 2) - 5 - (m + 1) = \overset{\circ}{11}$

$m - 4 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow m = \overset{\circ}{11} + 4$

$\therefore m = 4$

4 Si $\overline{(a+2)(a-2)(a+3)(2a+1)} = \overset{\circ}{7}$, calcula a.

Resolución:

$\overline{(a+2)(a-2)(a+3)(2a+1)} = \overset{\circ}{7}$

↓ ↓ ↓ ↓

1 2 3 1

– +

$2(a - 2) + 3(a + 3) + (2a + 1) - (a + 2) = \overset{\circ}{7}$

$6a + 4 = \overset{\circ}{7}$

$3a + 2 = \overset{\circ}{7}$

↓

4

$\Rightarrow a = 4$

5 ¿Cuántos números de la forma $\overline{abab}$ son múltiplos de nueve?

Resolución:

$\overline{abab} = \overset{\circ}{9}$

Descomponiendo por bloques:

$100\overline{ab} + \overline{ab} = \overset{\circ}{9}$

$101 \times \overline{ab} = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{9}$

$\overline{ab}$: 18; 27; 36; ...; 99

∴ Hay 10 números de la forma $\overline{abab}$.

6 Simplifica: $(\overset{\circ}{5} + 1)(\overset{\circ}{5} + 2)(\overset{\circ}{5} + 3)(\overset{\circ}{5} + 4)$

Resolución:

$(\overset{\circ}{5} + 1)(\overset{\circ}{5} + 2)(\overset{\circ}{5} + 3)(\overset{\circ}{5} + 4)$

Por propiedad:

$\overset{\circ}{5} + 1 \times 2 \times 3 \times 4 = \overset{\circ}{5} + 24 = \overset{\circ}{5} + 4$

7 Halla x.
Si: $7(x - 2) = \overset{\circ}{3}$

Resolución:

$7(x - 2) = \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow x - 2 = \overset{\circ}{3}$

$\therefore x = \overset{\circ}{3} + 2$

8 ¿Cuántos números de dos cifras son múltiplos de 6?

Resolución:

Sea: $N = \overline{ab} = \overset{\circ}{6} = 6k$

$\Rightarrow \overline{ab} = 6k$

Un número de dos cifras está entre:

$9 < \overline{ab} < 100$

$9 < 6k < 100$

$k \in \{2; 3; 4; ...; 16\} \Rightarrow$ Hay 15 números

Luego, la cantidad de valores de k, será también la cantidad de valores que toma N.

∴ Hay 15 números de dos cifras múltiplos de 6.

9 Halla el menor valor positivo de x, si:
$8x + 6 = \overset{\circ}{14}$

Resolución:

$2(4x + 3) = \overset{\circ}{14} = 7 \,.\, 2 \,.\, k$

$2(4x + 3) = 2 \,.\, 7k$

$\overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow 4x + 3 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow 4x + 3 + 21 = \overset{\circ}{7} + 21 \rightarrow$ sigue siendo $\overset{\circ}{7}$

$4x + 24 = \overset{\circ}{7}$

$4(x + 6) = \overset{\circ}{7} \Rightarrow x + 6 = \overset{\circ}{7}$

$x = \overset{\circ}{7} - 6$

$x = \overset{\circ}{7} + 1$

$x \in \{1; 8; 15; ...\}$

∴ El menor valor positivo de x es 1.

10 ¿Cuál es el residuo de dividir $M = 41 \times 26 \times 247 \times 2377$ entre 11?

Resolución:

$M = (11 \times 3 + 8)(11 \times 2 + 4)(11 \times 22 + 5)(11 \times 216 + 1)$

$M = (\overset{\circ}{11} + 8)(\overset{\circ}{11} + 4)(\overset{\circ}{11} + 5)(\overset{\circ}{11} + 1)$

$M = \overset{\circ}{11} + 8 \times 4 \times 5 \times 1$

$M = \overset{\circ}{11} + 160$

$M = \overset{\circ}{11} + (11 \times 14 + 6)$

$M = \overset{\circ}{11} + 6$

$\therefore$ El residuo es 6.

11 Halla x si:

$\overline{1x} + \overline{2x} + \overline{3x} + ... + \overline{10x} = \overset{\circ}{9}$

Resolución:

Por descomposición polinómica:

$(10 + x) + (20 + x) + (30 + x) + ... + (100 + x) = \overset{\circ}{9}$

$10x + 10(1 + 2 + 3 + ... + 10) = \overset{\circ}{9}$

$10x + 550 = \overset{\circ}{9}$

$(\overset{\circ}{9} + 1)x + (\overset{\circ}{9} + 1) = \overset{\circ}{9}$

$x + 1 = \overset{\circ}{9}$; pero x es de una cifra.

$\therefore x = 8$

12 Halla el residuo de dividir (936×877) entre 7.

Resolución:

Del enunciado:

$(936)(877) = \overset{\circ}{7} + r$

$(\overset{\circ}{7} + 5)(\overset{\circ}{7} + 2) = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + 5 \times 2 = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} + r \Rightarrow \quad r = 3$

13 Halla el residuo de dividir $(41)^{17}$ entre 9.

Resolución:

$(41)^{17} = \overset{\circ}{9} + r \Rightarrow (\overset{\circ}{9} + 5)^{17} = \overset{\circ}{9} + r$

$\overset{\circ}{9} + 5^{17} = \overset{\circ}{9} + r \Rightarrow 5^{17} = \overset{\circ}{9} + r$ ...(1)

Como: $5^3 = 125 = \overset{\circ}{9} + 8 = \overset{\circ}{9} - 1$

$\Rightarrow (5^3)^5 = \overset{\circ}{9} - 1$

Luego:

$5^{17} = 5^{15}.5^2 = (5^3)^5.(\overset{\circ}{9} + 7) = (\overset{\circ}{9} - 1)(\overset{\circ}{9} + 7)$

$5^{17} = \overset{\circ}{9} - 7 = \overset{\circ}{9} + 2$ ...(2)

De (1) y (2):

$\therefore r = 2$

14 A una fiesta asisten entre 400 y 450 personas. Si se observa que 1/3 de los asistentes usan casaca, 1/7 usan reloj y 1/5 no trabajan. ¿Cuántos asistieron a la fiesta?

Resolución:

Sea: n el número de personas, donde:

$400 < n < 450$

Por dato:

n.° de personas que usan casaca: $\frac{1}{3}n$

$\Rightarrow n = \overset{\circ}{3}$

n.° de personas que usan reloj: $\frac{1}{7}n$

$\Rightarrow n = \overset{\circ}{7}$

No trabajan: $\frac{1}{5}n$

$\Rightarrow n = \overset{\circ}{5}$

Luego: $n = \overset{\circ}{\overline{MCM(3;7;5)}} = \overset{\circ}{105}$

Se tiene:

$n = 105k \Rightarrow 400 < 105k < 450$
$\quad k \to 4$

$\Rightarrow n = 105(4) = 420$

$\therefore$ Asistieron a la fiesta 420 personas.

15 ¿Cuántos números de tres cifras, divisibles entre 11, tienen como suma de cifras a 15?

Resolución:

Del enunciado, nos piden la cantidad de numerales de la forma $\overline{abc}$, tal que:

$\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$ ...(1)

$a + b + c = 15$ ...(2)

Por el criterio de divisibilidad por 11, se tiene:

$\overset{+-+}{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow (a + c) - b = \overset{\circ}{11}$ ...(3)

De (2), se tiene:

$a + c = 15 - b$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3):

$15 - b - b = \overset{\circ}{11}$

$15 - 2b = \overset{\circ}{11} \Rightarrow b = 2$

Luego, en (4):

$a + c = 13$

$\therefore$ Existen 6 números.

NÚMEROS PRIMOS

A

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

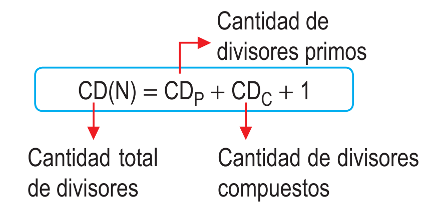
De acuerdo a la cantidad de divisores, los números enteros positivos se clasifican en números simples y números compuestos.

Números simples	**La unidad**. Es el único entero positivo que posee un solo divisor.
	Número primo. También llamado primo absoluto, es aquel número que admite, únicamente, dos divisores (él mismo y la unidad). Veamos algunos ejemplos: • 11 solo es divisible por 1 y por 11. Entonces 11 es primo. • 3 solo es divisible por 1 y por 3. Entonces 3 es primo.
Números compuestos	Es aquel número que tiene más de dos divisores. Veamos algunos ejemplos: • 15 es divisible por 1; 3; 5 y 15. Entonces 15 es compuesto. • 6 es divisible por 1; 2; 3 y 6. Entonces 6 es compuesto.

Nota

- El único número primo par es 2.
- La sucesión de números primos es infinita.
- Dos números enteros consecutivos son PESÍ.
- Dos números enteros impares consecutivos son PESÍ.

Dado un número entero positivo N, se cumple:



$$CD(N) = CD_P + CD_C + 1$$

Veamos un ejemplo:

Si la cantidad total de divisores de un número es 18 y posee 3 divisores primos, ¿cuántos divisores compuestos tiene dicho número?

Resolución:

Sabemos: $CD(N) = CD_P + CD_C + 1$

$18 = 3 + CD_C + 1$

$18 = 4 + CD_C \Rightarrow CD_C = 14$

$\therefore$ El número tiene 14 divisores compuestos.

Recuerda

Debes tener en cuenta que los números primos menores que 100, son:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

¡Recuérdalo!

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS O PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

Dos o más números son primos entre sí (PESÍ), si todos ellos tienen como único divisor común a la unidad.

Veamos algunos ejemplos:

12 ⟶ (1); 2; 3; 4; 6; 12
21 ⟶ (1); 3; 7; 21 $\Rightarrow$ 12; 21 y 26 son PESÍ.
26 ⟶ (1); 2; 13; 26
(divisores)

8 ⟶ (1); 2; 4; 8
15 ⟶ (1); 3; 5; 15 $\Rightarrow$ 8; 15 y 18 son PESÍ.
18 ⟶ (1); 2; 3; 6; 9; 18
(divisores)

Observación

La cantidad de **divisores simples** de un número entero positivo es igual a:

$CD_{simples} = CD_{primos} + 1$

La unidad ← 1

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ 2 A 2

Son aquellos grupos de números que al ser tomados de 2 en 2, cada par de números resulta ser PESÍ.
Veamos un ejemplo:

¿Serán 8; 15 y 26 PESÍ 2 a 2?

8 ⟶ 1; 2; 4; 8
15 ⟶ 1; 3; 5; 15
26 ⟶ 1; 2; 13; 26
(divisores)

Analicemos:
8 y 15 son PESÍ.
15 y 26 son PESÍ.
8 y 26 no son PESÍ.
$\therefore$ 8; 15 y 26 no son PESÍ 2 a 2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Todo número entero positivo mayor que la unidad se puede expresar, de manera única, como el producto de sus factores primos elevados a ciertos exponentes enteros positivos.

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}$$ ⟵ Se denomina **descomposición canónica**.

Veamos los siguientes ejemplos:

- $15 = 3^1 \times 5^1$
- $24 = 2^3 \times 3^1$
- $100 = 2^2 \times 5^2$

TABLA DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

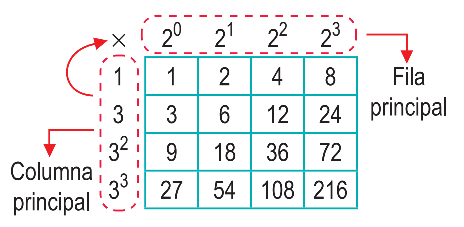
Para construir la tabla de los divisores de un número, se siguen los siguientes pasos:

- Se realiza la descomposición canónica del número.
- En la fila principal se ubican los divisores que contienen al menor número primo y en la columna principal, los demás divisores (de menor a mayor).
- Se van multiplicando los divisores de la columna principal con los divisores de la fila principal.

Veamos algunos ejemplos:

¿Cuál será la tabla de divisores de 216?

$216 = 2^3 \times 3^3$



×	2^0	2^1	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
3^3	27	54	108	216

¿Cuál será la tabla de divisores de 300?

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

×	2^0	2^1	2^2
1	1	2	4
3	3	6	12
5	5	10	20
	15	30	60
5^2	25	50	100
	75	150	300

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Dado un número N, cuya descomposición canónica es conocida ($N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta}$), entonces es posible determinar mediante un cálculo directo: la cantidad de divisores, la suma de divisores, la suma de las inversas de los divisores y el producto de divisores.

Cantidad de divisores de un número (CD)

Sea $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta}$, entonces:

$$CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$$

Veamos un ejemplo:

$4704 = 2^5 \times 3^1 \times 7^2$

$CD(4704) = (5 + 1)(1 + 1)(2 + 1)$

$CD(4704) = 6 \times 2 \times 3 \Rightarrow CD(4704) = 36$

Suma de divisores de un número (SD)

Sea $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta}$, entonces:

$$SD(N) = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1} - 1}{c - 1}\right)$$

Veamos un ejemplo: $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5^1$

$$SD(540) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^4 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right)$$

$$SD(540) = \left(\frac{7}{1}\right)\left(\frac{80}{2}\right)\left(\frac{24}{4}\right) \Rightarrow SD(540) = 1680$$

Suma de las inversas de los divisores (SID)

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

Veamos un ejemplo: $500 = 2^2 \times 5^3$

$$SD(500) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{5^4 - 1}{5 - 1}\right) = 1092$$

$$SID(500) = \frac{1092}{500} \Rightarrow SID(500) = 2,184$$

Producto de divisores (PD)

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

Veamos un ejemplo:

$50 = 2^1 \times 5^2 \Rightarrow CD(50) = (1 + 1)(2 + 1) = 2 \times 3 = 6$

$PD(50) = \sqrt{50^6} = 50^3$

$PD(50) = 125\ 000$

Nota

Regla para determinar si un número es primo absoluto

Veamos si 67 es primo. Observa, atentamente, el siguiente procedimiento:

Paso 1

Se extrae la raíz cuadrada aproximada del número: $\sqrt{67} \approx 8,19$

Paso 2

Enumera los números primos menores o iguales a esta aproximación: 2; 3; 5 y 7

Paso 3

Si la división entre el número y cada uno de los números primos hallados resulta inexacta, decimos que el número es primo, en caso contrario no lo es.

$67 = \overset{\circ}{2} + 1$

$67 = \overset{\circ}{3} + 1$

$67 = \overset{\circ}{5} + 2$

$67 = \overset{\circ}{7} + 4$

Por lo tanto, 67 es un número primo.

Recuerda

El producto de divisores de un número entero positivo N, que son múltiplos de m, es igual a:

$$m^{CD\left(\frac{N}{m}\right)} \times PD\left(\frac{N}{m}\right)$$

Ejemplo:

El producto de divisores de 12, que son múltiplos de 3 es:

$3^{CD\left(\frac{12}{3}\right)} \times PD\left(\frac{12}{3}\right) = 3^{CD(4)} \times DP(4)$

$= 3^3 \times 8 = 216$

Atención

La suma de divisores de un número entero positivo N, que son múltiplos de m, es igual a:

$$m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)$$

Ejemplo:

La suma de los divisores de 12, múltiplos de 3 es:

$3 \times SD\left(\frac{12}{3}\right) = 3 \times SD(4)$

$= 3 \times \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)$

$= 21$

Problemas resueltos

1 Calcula la suma de divisores de:
$N = 15^3 \times 8^2$

Resolución:

$N = (3 \times 5)^3 \times (2^3)^2 = 3^3 \times 5^3 \times 2^6$

Luego:

$SD(N) = \left(\frac{3^4 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^4 - 1}{5 - 1}\right)\left(\frac{2^7 - 1}{2 - 1}\right)$

$SD(N) = \left(\frac{80}{2}\right)\left(\frac{624}{4}\right)\left(\frac{127}{1}\right)$

$\therefore SD(N) = 792\ 480$

2 Dada la tabla de divisores de 560, calcula: $a + b + w + x + y + z$

×	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	1	2	4	x	16
5	5	y	20	40	w
b	a	14	28	56	112
	35	70	z	280	560

Resolución:

560 | 2
280 | 2
140 | 2
70 | 2
35 | 5
7 | 7
1 |

$\Rightarrow 560 = 2^4 \times 5 \times 7$

×	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	1	2	4	8	16
5	5	10	20	40	80
7	7	14	28	56	112
	35	70	140	280	560

$\Rightarrow x = 8;\ y = 10;\ w = 80;\ a = 7;\ z = 140 \wedge b = 7$

$\therefore a + b + w + x + y + z = 252$

3 Halla el número $N = 2^5 \times a \times b$, sabiendo que a y b son números primos mayores que 2 y que la suma de todos sus divisores es el triple de él.

Resolución:

Dato: $SD(N) = 3N$

$\Rightarrow \left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{a^2 - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^2 - 1}{b - 1}\right) = 3 . (32 . a . b)$

$63(a + 1)(b + 1) = 96 . a . b$

Simplificamos e igualamos:

$3 . 7\ (a + 1)(b + 1) = 32 . a . b \Rightarrow a = 3 \wedge b = 7$

$\therefore N = 2^5 . 7 . 3 = 672$

4 Halla el valor de n, sabiendo que el número $N = 21 . 15^n$ tiene 20 divisores compuestos.

Resolución:

$N = 3 . 7\ (3 . 5)^n = 3^{n+1} . 5^n . 7$

$CD(N) = CD_{primos} + CD_{compuestos} + 1$

$\Rightarrow (n + 2)(n + 1)2 = 3 + 20 + 1 = 24$

$(n + 2)(n + 1) = 12 = 4 . 3$

$\therefore n = 2$

5 Si $4^a . 3^b$ tiene $\overline{aa}$ divisores, ¿cuántos divisores tiene $\overline{abba}$?

Resolución:

$N = 4^a . 3^b = 2^{2a} . 3^b \Rightarrow CD(N) = (2a + 1)(b + 1)$

Por dato: $\overline{aa} = (2a + 1)(b + 1)$

$11 \times a = (2a + 1)(b + 1) \Rightarrow 2a + 1 = 11 \wedge a = b + 1$

$2a = 10 \quad 5 = b + 1$

$a = 5 \quad b = 4$

Reemplazamos en $\overline{abba}$ y descomponemos:

$\overline{abba} = 5445 = 5 \times 3^2 \times 11^2$

Luego:

$CD(\overline{abba}) = (1 + 1)(2 + 1)(2 + 1)$

$\therefore CD(\overline{abba}) = 2 \times 3 \times 3 = 18$

6 ¿Cuántos divisores que no son múltiplos de 40 tiene el número 9520?

Resolución:

$9520 = 2^4 . 5 . 7 . 17 \Rightarrow CD(9520) = (5)(2)(2)(2) = 40$

$9520 = 40\underbrace{(2 . 7 . 17)}_{M} \Rightarrow CD(M) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$

Todos los divisores de M son multiplicados por 40, entonces 9520 tiene 8 divisores múltiplos de 40.

$\Rightarrow CD_{\overset{\circ}{40}} = 8$

$\therefore CD_{\neq \overset{\circ}{40}} = 40 - 8 = 32$

7 Si al número 15×2^n se le multiplica por 6, se duplica la cantidad de divisores. ¿Cuál es el valor de n?

Resolución:

$15 \times 2^n = 3 \times 5 \times 2^n \Rightarrow CD(15 \times 2^n) = (1 + 1)(1 + 1)(n + 1)$

$CD(15 \times 2^n) = 4(n + 1)$

Luego:

$6(15 \times 2^n) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2^n$

$= 2^{n+1} \times 3^2 \times 5 \Rightarrow CD = (n + 2)(2 + 1)(1 + 1)$

$CD = 6(n + 2)$

Del enunciado:

$6(n + 2) = 2[4(n + 1)]$

$6n + 12 = 8n + 8$, de donde: $n = 2$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Recuerda

Los divisores comunes de un conjunto de números son también divisores de su MCD.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

Dado un conjunto de números enteros positivos, el MCD de dichos números está dado por el mayor de los divisores comunes positivos que comparten dichos números.

Ejemplo:

Divisores de 24: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

Divisores de 36: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36 $\Rightarrow$ Divisores comunes: 1; 2; 3; 4; 6; 12

Divisores de 60: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60

Se observa que el mayor de los divisores comunes de 24; 36 y 60 es 12, entonces:

$$\text{MCD}(24; 36; 60) = 12$$

MÉTODOS PARA HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Por descomposición canónica

Dados dos o más números descompuestos canónicamente, el MCD de dichas cantidades es numéricamente igual al producto de sus divisores primos comunes, elevados cada uno a su menor exponente.

Ejemplo:

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$675 = 3^3 \times 5^2$

$\Rightarrow \text{MCD}(360; 675) = 3^2 \times 5 = 45$

Atención

- $A = \overset{\circ}{\overline{\text{MCD}(A; B)}}$
- $B = \overset{\circ}{\overline{\text{MCD}(A; B)}}$
- MCD(1; A; B; C; ...) = 1
- MCD(A; A + 1; B; C; ...) = 1

Por descomposición simultánea

Se extrae de manera simultánea los factores comunes (únicamente) de los números dados para luego multiplicarlos.

Ejemplo:

60	72	48	2
30	36	24	2
15	18	12	3
5	6	4	

(5 - 6 - 4: PESÍ)

$\Rightarrow \text{MCD}(60; 72; 48) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

Por algoritmo de Euclides o divisiones sucesivas

Dados dos números enteros positivos, se divide el mayor de los números entre el menor; luego, el menor de los números iniciales entre el residuo obtenido, después, el residuo anterior entre el último residuo obtenido y así sucesivamente hasta que la división resulte exacta; entonces, el último divisor será el MCD de dichos números.
Para emplear este procedimiento usamos el siguiente esquema:

Cocientes →		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A	B	r_1	r_2	r_3	r_4
Residuos →		r_1	r_2	r_3	r_4	0

(0: División exacta)

Donde A > B; entonces:
$\text{MCD}(A; B) = r_4$

Ejemplo:
Halla el MCD de 216 y 128 mediante el algoritmo de Euclides.

Resolución:

	1	1	2	5
216	128	88	40	8
	88	40	8	0

$\therefore \text{MCD}(216; 128) = 8$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Dado un conjunto de número enteros positivos, el MCM de dichos números está dado por el menor múltiplo común positivo que los contiene exactamente.

Ejemplo:

Múltiplos positivos de 6: 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; ...

Múltiplos positivos de 9: 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; ... $\Rightarrow$ Múltiplos comunes: 18; 36; 54; ...

Múltiplos positivos de 18: 18; 36; 54; 72; 90; ...

De todos los múltiplos comunes positivos de 6; 9 y 18; el menor es 18, por lo tanto:

$$\text{MCM}(6; 9; 18) = 18$$

Recuerda

Los múltiplos comunes de un conjunto de números son también múltiplos de su MCM.

MÉTODOS PARA HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Por descomposición canónica

Dados dos o más números descompuestos canónicamente, el MCM de dichas cantidades es numéricamente igual al producto de sus divisores primos comunes y no comunes, elevados cada uno a su mayor exponente.

Ejemplo:

$4500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3$

$7425 = 3^3 \times 5^2 \times 11$ $\quad\Rightarrow \text{MCM}(4500; 7425; 1470) = 2^2 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$

$1470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

Por descomposición simultánea

Se extrae de manera simultánea los factores comunes y no comunes de los números dados, para luego multiplicarlos.

Ejemplo:

60 -	90 -	150	2
30 -	45 -	75	2
15 -	45 -	75	3
5 -	15 -	25	3
5 -	5 -	25	5
1 -	1 -	5	5
1 -	1 -	1	

$\Rightarrow \text{MCM}(60; 90; 150) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 900$

Observación

$\text{MCM}(A; B) = \overset{\circ}{A}$

$\text{MCM}(A; B) = \overset{\circ}{B}$

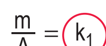
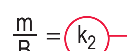
PROPIEDADES DEL MCD Y EL MCM

1. Si A y B son PESÍ, entonces:
   $\text{MCD}(A; B) = 1$
   $\text{MCM}(A; B) = A \times B$

2. Si $A = \overset{\circ}{B}$, entonces:
   $\text{MCD}(A; B) = B$
   $\text{MCM}(A; B) = A$

3. Si $\text{MCD}(A; B; C) = d$ y $\text{MCM}(A; B; C) = m$, entonces:

   $\frac{A}{d} = P_1$, $\frac{B}{d} = P_2$, $\frac{C}{d} = P_3$ — Números enteros positivos PESÍ.

   $\frac{m}{A} = k_1$, $\frac{m}{B} = k_2$, $\frac{m}{C} = k_3$ — Números enteros positivos PESÍ.

4. Para 2 números A y B se cumple:
   $\text{MCD}(A; B) \times \text{MCM}(A; B) = A \times B$

5. Si $\text{MCD}(A; B) = d \Rightarrow A = dp$ y $B = dq$, siendo p y q PESÍ, además, se cumple:
   $\text{MCM}(A; B) = dpq$

6. Si $\text{MCD}(A; B; C) = d$ y $\text{MCM}(A; B; C) = m$, entonces:
   $\text{MCD}(kA; kB; kC) = kd$
   $\text{MCM}(kA; kB; kC) = km$
   $\text{MCD}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{d}{n}$
   $\text{MCM}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{m}{n}$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántos números dividen exactamente a 675; 630 y 405?

Resolución:

Sabemos que los divisores comunes de un conjunto de números son también divisores de su MCD. Entonces:

$$\begin{array}{rcrcr|l} 675 & - & 630 & - & 405 & 5 \\ 135 & - & 126 & - & 81 & 3 \\ 45 & - & 42 & - & 27 & 3 \\ 15 & - & 14 & - & 9 & \end{array}$$

$MCD(675; 630; 405) = 3 \times 3 \times 5 = 45$

Los números que dividen exactamente a 675; 630 y 405 son los divisores de su MCD, es decir:

$$\underbrace{1; 3; 5; 9; 15; 45}_{6 \text{ números}}$$

2 Dados:

$A = 12 \times 15^n$ y $B = 12^n \times 15$; $n \in \mathbb{Z}^+$

Halla n, si su MCM tiene 60 divisores.

Resolución

Sabemos que el MCM de A y B es igual producto de sus divisores primos comunes y no comunes, elevados cada uno a su mayor exponente. Entonces:

$A = 2^2 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 2^2 \times 3^{n+1} \times 5^n$

$B = 2^{2n} \times 3^n \times 3 \times 5 = 2^{2n} \times 3^{n+1} \times 5$

Como $n \geq 1$ y $2n \geq 2$; entonces:

$MCM(A; B) = 2^{2n} \times 3^{n+1} \times 5^n$

Del enunciado:

$CD[MCM(A; B)] = 60$

$(2n + 1)\,(n + 2)\,(n + 1) = 3 \times 4 \times 5$

$\therefore n = 2$

3 El MCM de dos números es 308. Si su producto es 1232, ¿cuál es su MCD?

Resolución:

Sean A y B dichos números.

Del enunciado:

$$MCM(A; B) = 308 \text{ y } A \times B = 1232$$

Sabemos:

$A \times B = MCM(A; B) \times MCD(A; B)$

$\Rightarrow MCD(A; B) = \dfrac{A \times B}{MCM(A; B)}$

$MCD(A; B) = \dfrac{1232}{308}$

$\therefore MCD(A; B) = 4$

4 ¿Cuántos son los números positivos menores que 300 que son divisibles a la vez por 2; 4; 5 y 6?

Resolución:

Sea N un número divisible por 2; 4; 5 y 6 a la vez, es decir:

$N \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(2; 4; 5; 6)}}$

Hallamos MCM(2; 4; 5; 6):

$$\begin{array}{ccccccc|l} 2 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & 2 \\ 1 & - & 2 & - & 5 & - & 3 & 2 \\ 1 & - & 1 & - & 5 & - & 3 & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 5 & - & 1 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow MCM(2; 4; 5; 6)$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

Luego:

$N = \overset{\circ}{60} = 60k;\ k \in \mathbb{Z}^+$

Del enunciado:

$N < 300$

$60k < 300$

$k < 5$

$\rightarrow 1; 2; 3; 4$

$\Rightarrow$ N: 60; 120; 180; 240

Por lo tanto, hay 4 números positivos menores que 300 que son divisibles por 2; 4; 5 y 6 a la vez.

5 Determina el valor de k si:

$MCM\left(\dfrac{14k}{5}; \dfrac{7k}{10}; \dfrac{4k}{5}\right) = 168$

Resolución:

Efectuamos:

$MCM\left(\dfrac{2 \times 14k}{2 \times 5}; \dfrac{7k}{10}; \dfrac{2 \times 4k}{2 \times 5}\right) = 168$

$MCM\left(\dfrac{28k}{10}; \dfrac{7k}{10}; \dfrac{8k}{10}\right) = 168$

Por propiedad:

$\dfrac{k}{10} \times MCM(28; 7; 8) = 168 \quad ...(1)$

Calculamos MCM(28; 7; 8):

$$\begin{array}{rcrcr|l} 28 & - & 7 & - & 8 & 2 \\ 14 & - & 7 & - & 4 & 2 \\ 7 & - & 7 & - & 2 & 2 \\ 7 & - & 7 & - & 1 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow MCM(28; 7; 8) = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

Reemplazando en (1), tenemos:

$\dfrac{k}{10} \times 56 = 168$

$k = \dfrac{168 \times 10}{56}$

$\therefore k = 30$

6 Si A = 14n y B = 21n, además, MCD(A; B) = 14; calcula el valor de n.

Resolución:

Se tiene:

$A = 14n = (7n) \times 2$
$B = 21n = (7n) \times 3$ } PESÍ

Entonces:

$MCD(A; B) = 7n$
$14 = 7n$
$\Rightarrow n = 2$

7 Calcula el MCD de 145 y 13 por el algoritmo de Euclides.

Resolución:

	11	6	2
145	13	2	1
	2	1	0

$145 \div 13$: 13, 11; 15; 13; 2
$13 \div 2$: 12, 6; 1
$2 \div 1$: 2, 2; 0

$\therefore$ MCD(145; 13) = 1

8 Halla la suma de dos números cuyo MCM es 22 400 y los cocientes sucesivos al calcular su MCD son 2; 5 y 3.

Resolución:

Sea: MCD(A; B) = k

	2	5	3
A = 35k	B = 16k	3k	k
	3k	k	0

Del enunciado: MCM(A; B) = 22 400

$\Rightarrow \underbrace{35k}_{A} \cdot \underbrace{16k}_{B} = \underbrace{22\,400}_{MCM} \cdot \underbrace{k}_{MCD}$

De donde: k = 40

$\therefore A + B = 40(35 + 16) = 2040$

9 Jean tiene 3 rollos de alambre que miden 225 m, 250 m y 300 m de longitud y pretende sacar de estos, rollos más pequeños, pero de igual tamaño, sin que sobre material. ¿Cuántos de estos rollos como mínimo podrá obtener?

Resolución:

Sea x, la longitud de cada uno de los rollos pequeños; x debe ser divisor común de 225, 250 y 300; para obtener el mínimo número de rollos, el valor de x debe ser máximo.

$\Rightarrow x = MCD(225; 250; 300) = 25$

Luego: x = 25 m

El número de rollos será:

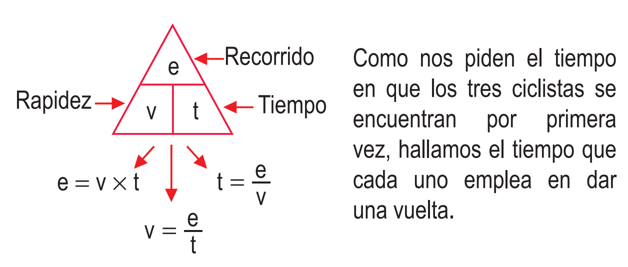
$\frac{225}{25} + \frac{250}{25} + \frac{300}{25} = 9 + 10 + 12 = 31$

$\therefore$ Podrá obtener 31 rollos como mínimo.

10 Tres ciclistas parten al mismo tiempo de un punto de una pista circular que tiene 240 m de circunferencia. El primero a una velocidad de 8 m/s; el segundo a 5 m/s y el tercero a 3 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los tres móviles realicen el primer encuentro por el punto de partida?

Resolución:

Para resolver este tipo de problemas, debes tener en cuenta:



Como nos piden el tiempo en que los tres ciclistas se encuentran por primera vez, hallamos el tiempo que cada uno emplea en dar una vuelta.

Entonces:

1.er ciclista: $t_1 = \frac{e}{v_1} = \frac{240}{8} = 30$ segundos

2.º ciclista: $t_2 = \frac{e}{v_2} = \frac{240}{5} = 48$ segundos

3.er ciclista: $t_3 = \frac{e}{v_3} = \frac{240}{3} = 80$ segundos

Ahora, sea t el tiempo que transcurrirá para que los tres ciclistas vuelvan a pasar por el punto de partida al mismo tiempo. Entonces:

$t \begin{cases} t_1k_1 = 30k_1 = \overset{\circ}{30} \\ t_2k_2 = 48k_2 = \overset{\circ}{48} \\ t_3k_3 = 80k_3 = \overset{\circ}{80} \end{cases} \Rightarrow t = \overset{\circ}{\overline{MCM(30; 48; 80)}}$

$t = \overset{\circ}{240}$

$\therefore$ Pasarán al mismo tiempo los tres ciclistas por el punto de partida, por primera vez, después de 240 segundos.

11 Halla dos números sabiendo que suman 55 y el MCM de ellos es 66. Calcula el menor número.

Resolución:

Sean los números: A = dp y B = dq, donde p y q son PESÍ y d = MCD(A; B).

Del enunciado:

$A + B = dp + dq = d(p + q) = 55 = 5 \times 11$
$MCM(A; B) = dpq = 66 = 6 \times 11 = 2 \times 3 \times 11$
$\Rightarrow p = 2; q = 3$ y $d = 11$

Nos piden el menor número:

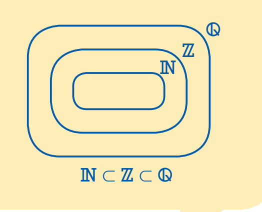
$A = dp = 11 \times 2 = 22$

DEFINICIÓN

Se denomina número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros, donde el divisor es distinto de cero. Estos constituyen el conjunto de números racionales denotado por ℚ.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} / x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\}$$; donde: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$

Atención



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

DENSIDAD EN ℚ

Se dice que el conjunto de números racionales (ℚ) es denso porque entre cada par de elementos distintos podemos encontrar un número racional.

OPERACIONES EN ℚ

En ℚ se definen las dos siguientes operaciones: adición y multiplicación.

Propiedades de la adición	Propiedades de la multiplicación
1. **Clausura.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$	1. **Clausura.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$
2. **Asociativa.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$	2. **Asociativa.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$
3. **Conmutativa.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	3. **Conmutativa.** Si $\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$
4. **Elemento neutro.** Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento neutro (0), tal que: $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$	4. **Elemento neutro.** Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento neutro (1), tal que: $\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$
5. **Elemento inverso.** Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento inverso $\left(-\frac{a}{b}\right)$, tal que: $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$	5. **Elemento inverso.** Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ existe un único elemento inverso $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, tal que: $\frac{a}{b} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1$

Nota

Propiedad distributiva de los números racionales:

$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

Nota

Si a, b ∈ ℚ, con $a < b$, entonces existe un c ∈ ℚ, tal que $a < c < b$; a dicha propiedad se le llama densidad de ℚ.

NÚMERO FRACCIONARIO

Se denomina así a todos aquellos números racionales que no representan a números enteros.

Ejemplos:

$\frac{3}{7}; \frac{9}{5}; -\frac{6}{13}; -\frac{12}{17}$ — Son números fraccionarios

$-\frac{18}{3}; -\frac{14}{7}; \frac{35}{5}; \frac{28}{4}$ — No son números fraccionarios

Nota

¿Qué significa $\frac{4}{7}$?

Gráficamente:

- El denominador (7) indica en cuántas partes se divide el todo (unidad de referencia).
- El numerador (4) representa las partes del todo que se toman o se observan.

FRACCIONES

Se denomina fracción al número fraccionario que presenta sus dos términos positivos.

$$f = \frac{N}{D}; N, D \in \mathbb{Z}^+; N \neq \overset{\circ}{D}$$ Donde: N es el numerador y D el denominador.

La fracción $f = \frac{N}{D}$ es irreductible, si y solo si MCD(N; D) = 1.

Clasificación de fracciones

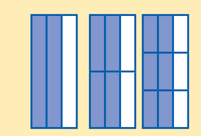
Por comparación de sus términos	**Propias:** cuando el numerador es menor que el denominador. Ejemplos: $\frac{7}{10}; \frac{3}{8}; \frac{35}{43}$ **Impropias:** cuando el numerador es mayor que el denominador. Ejemplos: $\frac{40}{11}; \frac{6}{4}; \frac{500}{13}$
Por grupos de fracciones	**Homogéneas:** se dice que dos o más fracciones son homogéneas cuando todas poseen el mismo denominador. Ejemplo: $\frac{16}{42}; \frac{3}{42}$ y $\frac{19}{42}$ son homogéneas. **Heterogéneas:** se dice que dos o más fracciones son heterogéneas cuando todas no poseen el mismo denominador. Ejemplo: $\frac{20}{19}; \frac{3}{5}$ y $\frac{4}{27}$ son heterogéneas.
Por su denominador	**Ordinarias:** cuando su denominador es diferente de una potencia de 10. Ejemplos: $\frac{3}{14}; \frac{6}{11}; \frac{18}{23}$ **Decimales:** cuando su denominador es igual a una potencia de 10. Ejemplos: $\frac{3}{100}; \frac{17}{10}; \frac{23}{1000}$
Por los divisores comunes entre sus términos	**Reductibles:** son todas aquellas fracciones cuyo denominador y numerador poseen algún divisor común distinto de 1. Ejemplos: $\frac{3}{6}; \frac{4}{12}; \frac{16}{24}$ **Irreductibles:** son aquellas fracciones cuyo numerador y denominador poseen como único divisor común a la unidad. Ejemplos: $\frac{3}{10}; \frac{12}{35}; \frac{8}{3}$

Observación

Fracciones equivalentes
Dos fracciones son equivalentes si expresan la misma porción de la unidad con términos distintos.

Se denota: $\frac{a}{b} <> \frac{c}{d}$

Ejemplo: $\frac{2}{3} <> \frac{4}{6} <> \frac{6}{9}$



Nota

Sea $f = \frac{N}{D}$ una fracción irreductible. A partir de f se podrán obtener fracciones equivalentes a ella, multiplicando al numerador y al denominador por una misma cantidad.

Ejemplo:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = ... = \frac{3k}{4k}; k \in \mathbb{Z}^+$

Comparación de fracciones

1. Si las fracciones son homogéneas, será mayor aquella fracción que tenga mayor numerador.

   Ejemplo:

   Dadas las fracciones $\frac{65}{42}; \frac{19}{42}; \frac{37}{42}$; como $19 < 37 < 65$; entonces: $\frac{19}{42} < \frac{37}{42} < \frac{65}{42}$

2. Si las fracciones son heterogéneas, empleamos el siguiente procedimiento:

   Dando común denominador: se halla el MCM de los denominadores y el nuevo numerador se hallará multiplicando el numerador inicial por el cociente del MCM, entre el denominador inicial.

   Ejemplo:

   Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{7}{12}; \frac{4}{15}; \frac{5}{6}$

   Hallamos MCM(12; 15; 6) = 60; luego: $\frac{7\times(60\div12)}{60}; \frac{4\times(60\div15)}{60}; \frac{5\times(60\div6)}{60} \Rightarrow \frac{35}{60}; \frac{16}{60}; \frac{50}{60}$

   Según fracciones homogéneas: $16 < 35 < 50 \Rightarrow \frac{16}{60} < \frac{35}{60} < \frac{50}{60} \Rightarrow \frac{4}{15} < \frac{7}{12} < \frac{5}{6}$

Nota

Simplificación de fracciones
Para simplificar una fracción se divide al numerador y denominador por una misma cantidad que los divida exactamente.

$$\frac{280}{700} \overset{\div2}{=} \frac{140}{350} \overset{\div2}{=} \frac{70}{175} \overset{\div5}{=} \frac{14}{35} \overset{\div7}{=} \frac{2}{5}$$

NÚMERO MIXTO

Un número mixto está formado por un número entero positivo y una fracción propia.

Ejemplos: $4\frac{1}{5}; 31\frac{5}{12}; 17\frac{8}{9}$

Para convertir un número mixto a fracción realizamos el siguiente procedimiento:

$4\frac{1}{5} = \frac{5\times4+1}{5} = \frac{21}{5}$ $\quad 31\frac{5}{12} = \frac{31\times12+5}{12} = \frac{377}{12}$ $\quad 17\frac{8}{9} = \frac{17\times9+8}{9} = \frac{161}{9}$

Nota

Sean las fracciones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

- Si $a\times d < b\times c \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- Si $a\times d > b\times c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

Adición y sustracción de fracciones

1. Si las fracciones tienen un mismo denominador, se suman los numeradores y al resultado se le pone el mismo denominador común.

   Ejemplo: $\frac{4}{12}+\frac{13}{12}-\frac{15}{12}=\frac{4+13-15}{12}=\frac{2}{12}$

2. Si las fracciones tienen distintos denominadores, estos se homogenizan y se procede como en el caso anterior.

   Ejemplo: $\frac{5}{6}-\frac{7}{9}+\frac{17}{33}$

   Hallamos el MCM(6; 9; 33) = 198; entonces:

$$\frac{5\times(198\div 6)}{198}-\frac{7\times(198\div 9)}{198}+\frac{17\times(198\div 33)}{198}=\frac{165-154+102}{198}=\frac{113}{198}$$

3. Si en la expresión aparecen números enteros y fracciones, se operan primero las fracciones y luego los enteros, añadiendo a estos, el resultado de efectuar las fracciones.

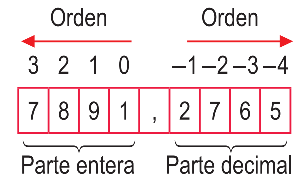
NÚMEROS DECIMALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción.

Ejemplos:

- $\frac{1}{2}=0,5$
- $\frac{5}{4}=1,25$
- $\frac{1}{3}=0,666...$
- $\frac{1}{6}=0,1666...$

Un número decimal tiene una parte entera y otra parte decimal; además, cada cifra de la parte decimal tiene asociado un orden que se cuenta de izquierda a derecha.



Clasificación de los números decimales

Número decimal exacto

Son los números decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras. Se obtiene de una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos solo a 2 y/o 5.

Ejemplos:

- $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=0,375$
- $\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times 5}=0,35$

Fracción generatriz:

$0,\overline{abcd}=\frac{\overline{abcd}}{10\,000}$ Ejemplo: $0,53=\frac{53}{100}$

Número decimal inexacto

Son los números decimales que tienen un número ilimitado de cifras decimales.

Número decimal inexacto periódico puro. Generado por una fracción irreductible cuyo denominador no tiene como divisores primos a 2 ni a 5.

Fracción generatriz: $0,\widehat{abcde}=\frac{\overline{abcde}}{99\,999}$ Ejemplo: $0,\widehat{765}=\frac{765}{999}$

Número decimal inexacto periódico mixto. Generado por una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos a 2 y/o 5, además de otros factores primos.

Fracción generatriz: $0,\overline{ab}\widehat{xyz}=\frac{\overline{abxyz}-\overline{ab}}{99\,900}$ Ejemplo: $0,1\widehat{45}=\frac{145-1}{990}=\frac{144}{990}$

Observación

Potenciación y radicación de fracciones:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
- $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Atención

Multiplicación de fracciones

- Si se multiplica una fracción por otra fracción, se multiplican los numeradores y se divide entre el producto de multiplicar los denominadores.
  Ejemplo:
  $\frac{3}{16}\times\frac{7}{5}\times\frac{6}{11}$
  $=\frac{3\times 7\times 6}{16\times 5\times 11}=\frac{126}{880}$
- Si se multiplica una fracción por un número entero, se multiplica el numerador por el número entero y se escribe el mismo denominador.
  Ejemplo:
  $27\times\frac{3}{19}=\frac{27\times 3}{19}=\frac{81}{19}$

División de fracciones

- Para dividir una fracción entre otra fracción, se multiplica la primera fracción por la fracción inversa de la segunda.
  Ejemplo:
  $\frac{3}{5}\div\frac{7}{12}=\frac{3}{5}\times\frac{12}{7}$ (Fracción inversa)
  $=\frac{3\times 12}{5\times 7}=\frac{36}{35}$
- Para dividir una fracción entre un número entero, se multiplica la fracción por la inversa del número entero.
  Ejemplo
  $\frac{12}{17}\div 5=\frac{12}{17}\times\frac{1}{5}=\frac{12}{85}$ (Inversa)

Nota

La división de fracciones también se pueden efectuar de la siguiente manera:

- $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{12}}=\frac{3\times 12}{5\times 7}=\frac{36}{35}$
- $\dfrac{\frac{12}{17}}{\frac{5}{1}}=\frac{12}{85}$

Problemas resueltos

A

1 Halla la fracción generatriz de $0,\widehat{95}$.

Resolución:

$0,\widehat{95}=\dfrac{95-9}{90}=\dfrac{86}{90}=\dfrac{43}{45}\quad \therefore\ 0,\widehat{95}=\dfrac{43}{45}$

2 Reduce:

$A=\dfrac{1,\widehat{7}}{0,\widehat{6}}+\dfrac{2,\widehat{4}}{0,\widehat{3}}$

Resolución:

$$A=\dfrac{\frac{17-1}{9}}{\frac{6}{9}}+\dfrac{\frac{24-2}{9}}{\frac{3}{9}}=\dfrac{\frac{16}{9}}{\frac{6}{9}}+\dfrac{\frac{22}{9}}{\frac{3}{9}}$$

$$A=\dfrac{16\times 9}{9\times 6}+\dfrac{22\times 9}{9\times 3}=\dfrac{8}{3}+\dfrac{22}{3}=\dfrac{8+22}{3}\Rightarrow A=10$$

3 Efectúa:

$M=\sqrt{0,144\times 3,7\widehat{3}}$

Resolución:

$$M=\sqrt{\dfrac{144}{1000}\cdot\left(3+\dfrac{73-7}{90}\right)}$$

$$M=\sqrt{\dfrac{144}{1000}\cdot\left(3+\dfrac{66}{90}\right)}$$

$$M=\sqrt{\dfrac{144}{1000}\times\dfrac{336}{90}}=\sqrt{\dfrac{18}{125}\times\dfrac{56}{15}}=\sqrt{\dfrac{336}{625}}\quad\therefore\ M=\dfrac{\sqrt{336}}{25}$$

4 ¿Cuántas fracciones propias son mayores que $\frac{2}{7}$, sabiendo que su denominador es 50?

Resolución:

$$\dfrac{2}{7}<\dfrac{n}{50}<1$$

$$50\left(\dfrac{2}{7}\right)<\ n\ <50$$

$$14,28<\ n\ <50\Rightarrow n\in\{15;16;17;...;49\}$$

$\therefore$ Existen 35 fracciones.

5 El triple de la suma de dos números es $\frac{57}{24}$ y el cuádruple de su diferencia $\frac{25}{21}$. Halla el mayor de dichos números.

Resolución:

Sean A y B dichos números.

Del enunciado:

$$3\times(A+B)=\dfrac{57}{24}\wedge 4\times(A-B)=\dfrac{25}{21}$$

$$A+B=\dfrac{19}{24}\wedge\qquad A-B=\dfrac{25}{84}$$

Luego:

$$A=\dfrac{1}{2}\times\Big(\underbrace{\dfrac{19}{24}+\dfrac{25}{84}}_{MCM(24;\,84)\,=\,168}\Big)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{133+50}{168}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{183}{168}=\dfrac{183}{336}$$

$$B=\dfrac{1}{2}\times\Big(\underbrace{\dfrac{19}{24}-\dfrac{25}{84}}_{MCM(24;\,84)\,=\,168}\Big)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{133-50}{168}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{83}{168}=\dfrac{83}{336}$$

Nos piden el mayor de dichos números: $A=\dfrac{183}{336}$

6 Halla una fracción equivalente a $\frac{7}{5}$, tal que si se multiplican sus términos resulta 5915.

Resolución:

Sea la fracción equivalente: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7k}{5k}\Rightarrow 7k\,.\,5k=5915\Rightarrow k=13$

Del enunciado: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7k}{5k}=\dfrac{91}{65}$

7 Halla la fracción impropia que resulta duplicada si se resta a sus 2 términos, la mitad de su numerador.

Resolución:

Sea la fracción: $\dfrac{a}{b}>1$

Del enunciado:

$$2\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{a-\frac{a}{2}}{b-\frac{a}{2}}=\dfrac{a}{2b-a}$$

$\Rightarrow 2a(2b-a)=ba$

$4b-2a=b\Rightarrow 3b=2a$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$

8 Si a los dos términos de una fracción se les añade 2 y 7, respectivamente, resulta una fracción equivalente a la original, entonces la fracción original es:

Resolución:

Sea la fracción: $\dfrac{a}{b}$

Dato: $\dfrac{a+2}{b+7}=\dfrac{a}{b}$

$\Rightarrow ab+2b=ab+7a$

$2b=7a$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{7}$

9 Los $\frac{5}{7}$ de un barril más 5 litros son de vino y $\frac{2}{3}$ del barril menos 29 litros son de agua. ¿Cuál es la capacidad del barril?

Resolución:

Sea x la capacidad del barril.

Litros de vino $=\dfrac{5}{7}x+5\ \wedge$ Litros de agua $=\dfrac{2}{3}x-29$

Litros de vino + litros de agua = capacidad del barril

$$\dfrac{5x}{7}+5+\dfrac{2x}{3}-29=x$$

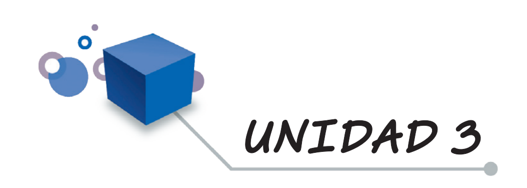
$$\dfrac{5x}{7}+\dfrac{2x}{3}-24=x$$

$$\dfrac{15x+14x}{21}=24+x$$

$$\dfrac{29x}{21}-x=24\Rightarrow\dfrac{29x-21x}{21}=24$$

$$\dfrac{8x}{21}=24\Rightarrow x=63$$

$\therefore$ La capacidad del barril es 63 litros.



UNIDAD 3

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{Z}^+$

Nota

Un número entero positivo será un cuadrado perfecto si y solo si tiene una cantidad impar de divisores.

Ejemplo:
$100 = 2^2 \times 5^2$
$\Rightarrow CD(100) = (2 + 1) \times (2 + 1) = 9$

Atención

Ejemplo 1:
- El número de la forma $\overline{ab7}$ no puede ser un cuadrado perfecto.
- El número de la forma $\overline{mn3}$ puede ser un cubo perfecto.

Ejemplo 2:
- $8000 = 2^3 \times 10^3$
- $2500 = 5^2 \times 10^2$
- $170\,000 = 17 \times 10^4$ no es un cuadrado perfecto, ya que 17 no es un cuadrado perfecto.

Propiedad

Sea p un número primo y N, $k \in \mathbb{Z}^+$
- Si $N = k^2 = \overset{\circ}{p}$, entonces $N = \overset{\circ}{\overline{p^2}}$.
- Si $N = k^3 = \overset{\circ}{p}$, entonces $N = \overset{\circ}{\overline{p^3}}$.

POTENCIACIÓN

Es aquella operación que consiste en calcular el producto repetido de una misma cantidad (base) tantas veces como lo indica otra cantidad (exponente).

$$P = \underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n \text{ veces}} = b^n$$

Donde:
b: base ($b \in \mathbb{Z}^+$)
n: exponente ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$)
P: potencia perfecta de grado n

Teorema fundamental

Para que un número entero positivo sea una potencia perfecta de grado n, los exponentes de los factores primos de su descomposición canónica deben ser múltiplos de n.

CASOS PARTICULARES

Potencia perfecta de grado 2 (cuadrado perfecto)	Potencia perfecta de grado 3 (cubo perfecto)
$144 = 2^4 \times 3^2$ Se observa que los exponentes de los factores primos son múltiplos de 2. Entonces, 144 es una potencia perfecta de grado 2 (cuadrado perfecto).	$1728 = 2^6 \times 3^3$ Se observa que los exponentes de los factores primos son múltiplos de 3. Entonces, 1728 es una potencia perfecta de grado 3 (cubo perfecto).

CRITERIOS DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

Según su última cifra

N	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9	...0
N^2	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1	...0
N^3	...1	...8	...7	...4	...5	...6	...3	...2	...9	...0

Se observa:
- Un cuadrado perfecto no puede terminar en las cifras 2; 3; 7 o 8.
- Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

Por su terminación en ceros

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Si: $\overline{ab...m\underbrace{00...00}_{k \text{ cifras}}} = N^2$ Entonces: • $\overline{ab...m}$ es un cuadrado perfecto. • $k = \overset{\circ}{2}$	Si: $\overline{np...z\underbrace{00...00}_{k \text{ cifras}}} = N^3$ Entonces: • $\overline{np...z}$ es un cubo perfecto. • $k = \overset{\circ}{3}$

Por su terminación en cifra 5

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Si: $\overline{abcd5} = N^2$ Entonces: d = 2 y c puede ser 0; 2 o 6.	Si: $\overline{abcd5} = N^3$ Entonces: d puede ser 2 o 7.

Por criterios de divisibilidad

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Un cuadrado perfecto puede ser: • $\overset{\circ}{4}$ o $\overset{\circ}{4} + 1$ • $\overset{\circ}{9}$; $\overset{\circ}{9} + 1$; $\overset{\circ}{9} + 4$ o $\overset{\circ}{9} + 7$	Un cubo perfecto puede ser: • $\overset{\circ}{4} - 1$; $\overset{\circ}{4}$ o $\overset{\circ}{4} + 1$ • $\overset{\circ}{9} - 1$; $\overset{\circ}{9}$ o $\overset{\circ}{9} + 1$

RADICACIÓN

Es aquella operación inversa a la potenciación en la cual, dadas dos cantidades: radicando e índice, se busca una tercera cantidad llamada raíz que elevada a un exponente igual al índice nos da el radicando.

$$\sqrt[n]{N} = K$$

Donde:
N : radicando
n : índice
K : raíz

CASOS PARTICULARES

Raíz cuadrada entera (índice 2)

Raíz cuadrada exacta

$\sqrt{N}\,\underline{|K}$; residuo 0 $\Rightarrow N = K^2$

- Se observa que si un número entero positivo tiene raíz cuadrada exacta entonces dicho número es un cuadrado perfecto.

Raíz cuadrada inexacta

Por defecto	Por exceso
$\sqrt{N}\,\underline{\lvert K}$ r_d $N = K^2 + r_d$	$\sqrt{N}\,\underline{\lvert K+1}$ r_e $N = (K+1)^2 - r_e$

Raíz cúbica entera (índice 3)

Raíz cúbica exacta

$\sqrt[3]{N}\,\underline{|K}$; residuo 0 $\Rightarrow N = K^3$

- Se observa que si un número entero positivo tiene raíz cúbica exacta entonces dicho número es un cubo perfecto.

Raíz cúbica inexacta

Por defecto	Por exceso
$\sqrt[3]{N}\,\underline{\lvert K}$ r_d $N = K^3 + r_d$	$\sqrt[3]{N}\,\underline{\lvert K+1}$ r_e $N = (K+1)^3 - r_e$

Nota

Cómo hallar la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100 sin usar calculadora

1. Se forman periodos de dos cifras empezando por la derecha.
2. Se halla la raíz cuadrada entera del primer periodo (de izquierda a derecha), ella será la primera cifra de la raíz.
3. Se resta del primer periodo, el cuadrado de la primera cifra de la raíz. A la derecha de la diferencia se baja el periodo siguiente.
4. Al número formado se separa la cifra de las unidades; esta cantidad se divide entre el doble de la primera cifra de la raíz.
5. El cociente entero obtenido se escribe a la derecha del divisor; dicho numeral formado se multiplica por el referido cociente entero, este producto se resta del numeral formado por el primer residuo y el segundo periodo.
6. Si dicha diferencia es un número natural, la cifra que sirvió de cociente, será la segunda cifra de la raíz. Si no, se disminuye en una unidad la cifra que se usó de cociente, sometiéndose a análogas comprobaciones hasta obtener la cifra correcta de la raíz.

A la derecha del resto se bajará el periodo siguiente y así sucesivamente hasta bajar el último periodo y hallar la última cifra de la raíz.

Ejemplo:

$\sqrt{6} \to 2$

$\sqrt{6\,35\,04}$	252
$2^2 \to$ 4	$2 \times 2 = 4$
23 5	$23 \div 4 = (5),75$
225	$45 \times 5 = 225$
100 4	$25 \times 2 = 50$
1004	$100 \div 50 = (2)$
- - - -	$502 \times 2 = 1004$

Importante

- Todo número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, está comprendido entre dos cuadrados perfectos consecutivos.
  Ejemplo:
  $2^2 < 7 < 3^2$
- Todo número entero positivo que no es un cubo perfecto, está comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.
  Ejemplo:
  $2^3 < 16 < 3^3$

Recuerda

- Para la raíz cuadrada se cumple:
  $r_{mín.} = 1$
  $r_{máx.} = 2K$
  $r_d + r_e = 2K + 1$
- Para la raíz cúbica se cumple:
  $r_{mín.} = 1$
  $r_{máx.} = 3K(K + 1)$
  $r_d + r_e = 3K(K + 1) + 1$

Problemas resueltos

1 Halla el menor número entero por el cual debemos multiplicar a 168 para que el producto sea un cuadrado perfecto.

Resolución:

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

Sea n el número:

$\Rightarrow \underbrace{168 \,.\, n}_{\text{cuadrado perfecto}} = 2^3 \times 3 \times 7 \times \underbrace{2 \times 3 \times 7}_{n} = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$

$\Rightarrow \; n = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore \; n = 42$

2 ¿Cuál es el menor número múltiplo de 42 tal que la suma de su tercera y séptima parte da como resultado un cuadrado perfecto?

Resolución:

$N = \overset{\circ}{42} \;\; \Rightarrow \;\; N = 42k$; (k es mínimo)

Del enunciado: $\dfrac{42k}{3} + \dfrac{42k}{7} = p^2$

$20k = p^2$

$2^2 \times 5 \times \underset{\underset{5}{\downarrow}}{k} = p^2$

$\therefore \; N = 42(5) = 210$

3 Si $\overline{ab000}$ es un cubo perfecto, calcula el menor valor de a + b.

Resolución:

Del enunciado: $\underbrace{\overline{ab000}}_{\text{cantidad } \overset{\circ}{3}} = k^3$

Entonces: $\overline{ab} = p^3$

$10 \leq \overline{ab} \leq 99$

$10 \leq p^3 \leq 99$

$2,15 \leq p \leq 4,63$

$\Rightarrow$ p: 3; 4

Luego: $\overline{ab000} \in \{27\,000; 64\,000\}$

$\therefore$ El menor valor de a + b es: 2 + 7 = 9

4 Al extraer la raíz cúbica de un número entero positivo se obtuvo 12 de raíz y residuo 25. Halla la suma de cifras del número.

Resolución:

$\sqrt[3]{N} \;|\; 12$, residuo 25 $\quad \Rightarrow \quad N = 12^3 + 25$

$N = 1728 + 25$

$N = 1753$

$\therefore$ La suma de cifras del número es: 16

5 Si el número $\overline{2x0y5}$ es un cuadrado perfecto, halla la raíz de dicho número, si x toma su mayor valor.

Resolución:

Del enunciado:

$\overline{2x0\underset{\underset{2}{\downarrow}}{y}5} = k^2$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Entonces:

$20\,025 \leq \overline{2x025} \leq 29\,025$

$20\,025 \leq k^2 \leq 29\,025$

$141,5 \leq k \leq 170,4$

$\Rightarrow$ k: 145; 155; 165

Luego: $\overline{2x025} \in \{21\,025; 24\,025\}$

Como x toma el mayor valor, entonces: $24\,025 = 155^2$

$\therefore$ La raíz cuadrada es: 155

6 Se compra cierto número de relojes por S/.7225. Sabiendo que el número de relojes comprados es igual al precio de un reloj en soles, ¿cuántos relojes se han comprado?

Resolución:

n.° de relojes: n

Precio unitario: S/.n

Luego: n(n) = 7225

$n^2 = 85^2 \Rightarrow n = 85$

$\therefore$ Se han comprado 85 relojes.

7 Halla la suma de las cifras del menor número divisible por 7, tal que al extraerle su raíz cuadrada deje de residuo 19.

Resolución:

$N_{mín.} = \overset{\circ}{7} \quad ...(1)$

Dato: $\sqrt{N_{mín.}} \;|\; k$, residuo 19 $\quad \Rightarrow \quad N_{mín.} = k^2 + 19 \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$k^2 = \overset{\circ}{7} - 19 \Rightarrow k^2 = \overset{\circ}{7} + 2 + 7 = (\overset{\circ}{7} + 3)^2 = (\overset{\circ}{7} \pm 3)^2$

$\Rightarrow k = \overset{\circ}{7} \pm 3$

Pero el residuo máximo es 2k.

$2k \geq 19 \Rightarrow k \geq 9,5$

El mínimo valor de k es 10.

En (2): $N = 10^2 + 19 = 119$

Piden: Σ cifras = 11

8 Al extraer la raíz cúbica de un número se obtuvo como residuo 60, siendo este máximo. Halla la suma de las cifras de dicho número.

Resolución:

$r_{máx.} = 3k(k + 1) = 60$

$k(k + 1) = 20 = 4(4 + 1)$

$\Rightarrow k = 4$

Sea $\overline{abc}$ el número, entonces:

$\overline{abc} = k^3 + r$

$= 4^3 + 60$

$= 64 + 60$

$\overline{abc} = 124$

$\therefore \; a + b + c = 7$

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades homogéneas, mediante la sustracción o división.

Clases de razón

1. **Razón aritmética.** Se da cuando la comparación de estas cantidades homogéneas se realiza por exceso, es decir, por diferencia.

$$a - b = r$$

Donde: a es el antecedente; b, el consecuente y r, el valor de la razón aritmética.

Ejemplo:
Si Sandra tiene 10 manzanas y Javier, 6 manzanas; entonces:

$$10 - 6 = 4$$

Podemos decir que la cantidad de manzanas que tiene Sandra excede a la cantidad de manzanas que tiene Javier en 4 unidades.

Atención

En el ejemplo, también podemos decir que la cantidad de manzanas que tiene Javier es excedida por la cantidad de manzanas que tiene Sandra en 4 unidades.

2. **Razón geométrica.** Se da cuando la comparación de estas cantidades homogéneas se realiza por cociente, es decir, por división.

$$\frac{a}{b} = k$$

Donde: a es el antecedente; b, el consecuente y k, la razón geométrica.

Ejemplo:
Si Elizabeth tiene 24 años y Martha, 32 años; entonces: $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

Podemos decir que las edades de Elizabeth y Martha están en la relación de 3 a 4.

Observación

En el ejemplo, también podemos decir que las edades de Elizabeth y Martha son como 3 es a 4.

PROPORCIÓN

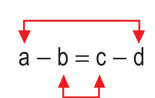
Se denomina proporción al resultado de igualar dos razones de una misma clase.

Clases de proporción

1. Proporción aritmética

Es el resultado de igualar dos razones aritméticas.

Términos extremos



Términos medios

Tipos de proporción aritmética

1.1 Proporción aritmética discreta. Cuando los términos medios son diferentes.

$$a - b = c - d$$

Donde: d es la cuarta diferencial de a, b y c.
Ejemplo: $42 - 26 = 35 - 19$

1.2 Proporción aritmética continua. Cuando los términos medios son iguales.

$$a - b = b - c$$

Donde: b es la media diferencial de a y c; y c es la tercera diferencial de a y b.
Ejemplo: $17 - 10 = 10 - 3$

Recuerda

- En la proporción aritmética.
  $a - b = c - d$
  a y c: son los antecedentes.
  b y d: son los consecuentes.
  Además:
  $a + d = b + c$
- En la proporción aritmética continua:
  $a - b = b - c$
  Se cumple:
  $b = \frac{a + c}{2}$

2. Proporción geométrica

Es el resultado de igualar dos razones geométricas.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Donde: a y d son los términos extremos; y, b y c son los términos medios.

Tipos de proporción geométrica

2.1 Proporción geométrica discreta. Cuando los términos medios son diferentes.

$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ Donde: d es la cuarta proporcional de a, b y c.

Ejemplo: $\frac{42}{6}=\frac{77}{11}$

2.2 Proporción geométrica continua. Cuando los términos medios son iguales.

$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$ Donde: b es la media proporcional de a y c; y c es la tercera proporcional de a y b.

Ejemplo: $\frac{9}{6}=\frac{6}{4}$

Atención

En la proporción geométrica discreta:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

a y c: son los antecedentes.
b y d: son los consecuentes.

En la proporción geométrica continua:

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

Se cumple:

$b=\sqrt{a\times c}$

Propiedades de una proporción geométrica

Sea la proporción geométrica: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

1. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
2. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
3. $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
4. $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES (SRGE)

Una serie de razones geométricas equivalentes es la igualdad de más de dos razones geométricas que tienen el mismo valor de la razón.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=...=\frac{p}{q}=k}$$

Donde: k es el valor de la razón.

Nota

En la serie de razones geométricas equivalentes:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$

Se tiene:
a; c; e; g: antecedentes
b; d; f; h: consecuentes

Además:
a: 1.er término
b: 2.° término
c: 3.er término
d: 4.° término
e: 5.° término
⋮

Propiedades

Dada la serie de razones geométricas equivalentes: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$; se cumple:

1. $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

   Ejemplo: Si: $\frac{45}{5}=\frac{63}{7}=\frac{81}{9}=9$, entonces: $\frac{45+63+81}{5+7+9}=\frac{189}{21}=9$

2. $\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=k^3$

   Ejemplo: Para la SRGE del ejemplo anterior, se cumple: $\frac{45\times 63\times 81}{5\times 7\times 9}=\frac{229\,635}{315}=9^3$

Serie de razones geométricas equivalentes continuas

Una serie de razones geométricas equivalentes continuas es de la forma:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k}$$

Se observa que: $d=ek$

$c=dk=(ek)k=ek^2$

$b=ck=(ek^2)k=ek^3$

$a=bk=(ek^3)k=ek^4$

También se cumple:

$\frac{a\times b\times c\times d}{b\times c\times d\times e}=k^4 \Rightarrow \frac{a}{e}=k^4$

Recuerda

Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, entonces:

$a=bk$; $c=dk$; $e=fk$

Problemas resueltos

A

1 Las edades de Mercedes y Javier son como 4 es a 5, respectivamente. Si Javier tiene 20 años, ¿cuántos años tiene Mercedes?

Resolución:

Sean:

Edad de Mercedes: M

Edad de Javier: J

Del enunciado, se tiene: $\frac{M}{J} = \frac{4}{5}$

Del problema, Javier tiene 20 años, entonces:

$\frac{M}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow M = 16$

2 Si: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+9}{y} = \frac{z+7}{12} = 2$

Halla: $x + y + z$

Resolución:

Del enunciado:

$\frac{x+2}{3} = 2 \Rightarrow x = 4$

$\frac{y+9}{y} = 2 \Rightarrow y = 9$

$\frac{z+7}{12} = 2 \Rightarrow z = 17$

Piden:

$x + y + z = 4 + 9 + 17 = 30$

3 Las edades de José y Luis están en la relación de 5 a 3, respectivamente. Si dentro de 20 años sus edades sumarán 80, halla la razón aritmética de dichas edades.

Resolución:

Sean las edades:

José: 5k

Luis: 3k

Del enunciado:

$(5k + 20) + (3k + 20) = 80$

$8k + 40 = 80$

$\Rightarrow k = 5$

Luego, José tiene 5(5) = 25 años y Luis 3(5) = 15 años.

$\therefore 25 - 15 = 10$

4 La razón geométrica de dos cantidades es $\frac{9}{4}$, halla dichos números si la razón aritmética de estos es 125.

Resolución:

Sean a y b dichos números.

Del enunciado:

$\frac{a}{b} = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{matrix} a = 9k \\ b = 4k \end{matrix}$

Además:

$a - b = 125$

$9k - 4k = 125 \Rightarrow k = 25$

$\therefore\ a = 225 \wedge b = 100$

5 En una fiesta se observa que por cada 7 hombres hay 5 mujeres, si en un determinado momento 45 hombres y 15 mujeres no bailan, ¿cuántas personas hay en dicha fiesta?

Resolución:

Sea H el n.° de hombres y M el n.° de mujeres.

Por dato:

$\left.\frac{H}{M} = \frac{7}{5}\right\} \begin{matrix} H = 7k \\ M = 5k \end{matrix}$

Además:

$$\underbrace{7k - 45}_{\substack{\text{n.° de mujeres} \\ \text{que bailan}}} = \underbrace{5k - 15}_{\substack{\text{n.° de hombres} \\ \text{que bailan}}}$$

$2k = 30$

$k = 15$

$\therefore$ n.° total de personas $= 12k = 12(15) = 180$

6 En una serie de razones geométricas equivalentes, los consecuentes son 3; 5 y 7. Si la diferencia entre los dos antecedentes mayores es 18, calcula el menor de los antecedentes.

Resolución:

Sea la SRGE: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k \Rightarrow a = 3k;\ b = 5k;\ c = 7k$

Del enunciado:

$7k - 5k = 18$

$2k = 18 \Rightarrow k = 9$

Piden: $a = 3k = 3(9) = 27$

7 Si: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = k$

Además: $(A + B) \times (C + D) \times (E + F) = 3^{15}$

Calcula: $\sqrt[3]{B \times D \times F} + \sqrt[3]{A \times C \times E}$

Resolución:

Por propiedad de las SRGE:

$\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D} = \frac{E+F}{F} = k + 1$

Luego:

$\frac{(A+B)\times(C+D)\times(E+F)}{B\times D\times F} = (k+1)^3$

$3^{15} = (k+1)^3 \times B \times D \times F$

$3^5 = (k+1) \times \sqrt[3]{B \times D \times F}$

También sabemos que:

$\frac{A\times C\times E}{B\times D\times F} = k^3 \Rightarrow A \times C \times E = k^3 \times B \times D \times F$

Entonces:

$\sqrt[3]{A\times C\times E} + \sqrt[3]{B\times D\times F}$

$\sqrt[3]{k^3\times B\times D\times F} + \sqrt[3]{B\times D\times F} = (k+1)\times\sqrt[3]{B\times D\times F}$

$= 3^5$

$= 243$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Nota

Ejemplo:

Magnitud	Cantidad
Masa	30 kg
Tiempo	2 horas
Longitud	8 m

CONCEPTOS PREVIOS

Magnitud. Es todo aquello que tiene la propiedad de ser medido, es decir, puede ser expresado en forma cuantitativa.

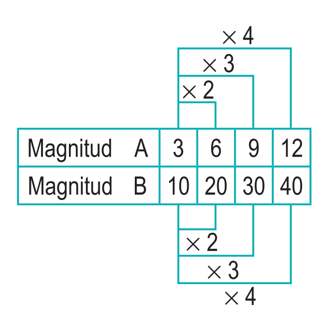
Cantidad. Es el resultado de la medición o cuantificación de la intensidad de una magnitud.

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

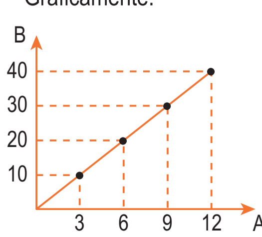
Dos magnitudes son directamente proporcionales, cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma proporción.

Ejemplo:
Supongamos que tenemos dos magnitudes A y B que son directamente proporcionales:



Magnitud A	3	6	9	12
Magnitud B	10	20	30	40

Gráficamente:



Atención

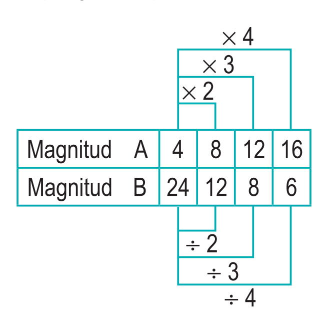
Se observa que el cociente de los valores correspondientes de las magnitudes A y B es constante. Entonces:

$$A \text{ DP } B \Longleftrightarrow \frac{(\text{Valor de A})}{(\text{Valor de B})} = \text{cte.}$$

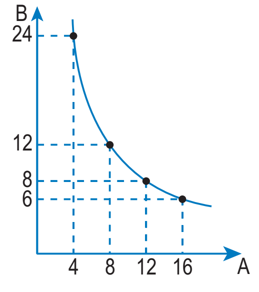
Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra disminuye o aumenta, respectivamente, en la misma proporción.

Ejemplo:
Supongamos que tenemos dos magnitudes M y N que son inversamente proporcionales:



Magnitud A	4	8	12	16
Magnitud B	24	12	8	6



Observación

En este caso se observa que el producto de los valores correspondientes de las magnitudes A y B es constante.

Entonces:

$$A \text{ IP } B \Longleftrightarrow (\text{Valor de A}) \times (\text{Valor de B}) = \text{cte.}$$

REPARTO PROPORCIONAL

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales que consiste en distribuir una cantidad en partes que sean directa o inversamente proporcional a ciertos números dados.

Nota

Propiedades

1. Si A DP B, entonces B DP A.
2. Si A IP B, entonces B IP A.
3. Si A DP B, entonces A IP $\frac{1}{B}$.
4. Si A IP B, entonces A DP $\frac{1}{B}$.
5. Si A DP B, cuando C es constante y A IP C, cuando B es constante, entonces: $\frac{(\text{Valor de A}) \times (\text{Valor de C})}{(\text{Valor de B})} = \text{cte.}$

CLASES DE REPARTO

Reparto simple

a) Reparto simple directo. Consiste en repartir una cantidad en partes que sean DP a ciertos números.

Ejemplo:
Un agricultor dispone de 125 hectáreas de cultivo y desea hacer un reparto del terreno entre sus tres hijos de manera proporcional a sus edades que son 14; 7 y 4. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Resolución:
Del enunciado:

125 se reparte de manera directamente proporcional a 14; 7; 4

Sean las partes: A, B y C, tal que A + B + C = 125.

Para cada una de estas partes se cumple: (Parte) DP (Índice) $\Rightarrow \dfrac{(\text{Parte})}{(\text{Índice})} = \text{cte.}$

Luego: $\dfrac{A}{14} = \dfrac{B}{7} = \dfrac{C}{4} = K$

Empleando las propiedades de las SRGE, tenemos:

$$\frac{A+B+C}{14+7+4} = K \Rightarrow \frac{125}{25} = K \Rightarrow K = 5$$

Finalmente:
A = 14K = 14(5) = 70; B = 7K = 7(5) = 35; C = 4K = 4(5) = 20

b) Reparto simple inverso. Consiste en repartir una cantidad en partes que sean IP a ciertos números.

Ejemplo:
Reparte 4500 en forma IP a los números 15; 12 y 10.

Resolución:
Del enunciado:

4500 se reparte de manera inversamente proporcional a < 15; 12; 10

Sean las partes: M, N y P, tal que: M + N + P = 4500

Para cada una de las partes se cumple: (Parte) IP (Índice) $\Rightarrow$ (Parte) $\times$ (Índice) = cte.

Luego: 15M = 12N = 10P = cte.

Hallamos: MCM(15; 12; 10) = 60, ahora:

$$\frac{15M}{60} = \frac{12N}{60} = \frac{10P}{60} \Rightarrow \frac{M}{4} = \frac{N}{5} = \frac{P}{6} = K$$

Empleando las propiedades de las SRGE, tenemos:

$$\frac{M+N+P}{4+5+6} = K \Rightarrow \frac{4500}{15} = K \Rightarrow K = 300$$

Finalmente:
M = 4K = 4(300) = 1200; N = 5K = 5(300) = 1500; P = 6K = 6(300) = 1800

Reparto compuesto

Cuando se realiza un reparto en forma proporcional al producto de varios números; se está ante un reparto proporcional compuesto.

Ejemplo:
Blanca desea repartir S/.220 entre sus tres hijos: Fabricio, Rodrigo y Fernanda en forma proporcional a sus edades que son 9; 7 y 4 años respectivamente, y a las notas que han obtenido en el curso de matemática que son 16; 18 y 15 respectivamente.

Resolución:
Como puede observarse, aquí hay dos grupos de números para tomar como referencias para el reparto; entonces cuando esto ocurra, se repartirá en forma proporcional a los productos correspondientes de dichos números, es decir:

$A + B + C = 220$ y $\dfrac{A}{9 \times 16} = \dfrac{B}{7 \times 18} = \dfrac{C}{4 \times 15}$

De donde: $\dfrac{A+B+C}{144+126+60} = \dfrac{A}{144} = \dfrac{B}{126} = \dfrac{C}{60}$

O sea:

- $\dfrac{220}{330} = \dfrac{A}{144}$ es decir: $A = \dfrac{2}{3} \times 144 = S/.96$
- $\dfrac{220}{330} = \dfrac{B}{126}$ es decir: $B = \dfrac{2}{3} \times 126 = S/.84$
- $\dfrac{220}{330} = \dfrac{C}{60}$ es decir: $C = \dfrac{2}{3} \times 60 = S/.40$

Recuerda

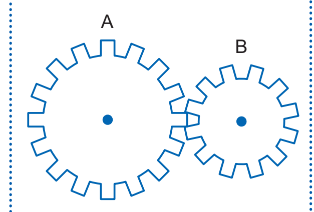
A los números 14; 7 y 4 se les denomina **índices de reparto**.

Atención

En este caso los índices de reparto son 15; 12 y 10.

Nota

Para 2 ruedas engranadas

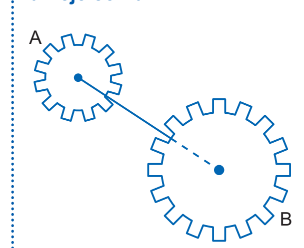


Se cumple:
$N_A \times V_A = N_B \times V_B$

Donde:
V_A: n.° vueltas de A.
V_B: n.° vueltas de B.
N_A: n.° dientes de A.
N_B: n.° dientes de B.

En general:
(n.° vueltas) IP (n.° dientes)

Para 2 ruedas unidas por un eje común



Se cumple:
n.° vueltas de A = n.° vueltas de B

Problemas resueltos

1 Si A es IP a C^2, calcula A cuando C = 9, si cuando A = 10 ; C = 5.

Resolución:

Del enunciado:

$A \times C^2 = K$

$10 \times (5)^2 = A \times (9)^2 \Rightarrow 250 = 81A$

$\therefore A = \frac{250}{81}$

2 El precio de un diamante es proporcional al cubo de su peso. Si un diamante de 5 gramos cuesta S/.1500, ¿cuánto cuesta un diamante que pesa 3 gramos?

Resolución:

Sea: precio = S y peso = P

$\frac{S}{P^3} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{1500}{(5)^3} = \frac{S}{(3)^3} \quad \therefore \quad S = S/.324$

3 Reparte proporcionalmente 300 a los números 2^n y 2^{n+1}.

Resolución:

Como no mencionan qué tipo de reparto es, asumimos que es DP.

$$300\begin{cases} A & 2^n \Rightarrow 1 \times 2^n \Rightarrow 1 \\ B & 2^{n+1} \Rightarrow 2 \times 2^n \Rightarrow 2 \end{cases} \quad \text{(DP)} \qquad A = 1 \times k, \quad B = 2 \times k$$

$\Rightarrow A + B = 300 \Rightarrow 3k = 300 \Rightarrow k = 100$

$\therefore \; A = 100 \quad \wedge \quad B = 200$

4 Se reparten 100 caramelos en forma DP a m^2, 2m y 1; siendo m un número natural. Si al hacer el reparto la mayor cantidad es 64, halla m, siendo además $m > 2$.

Resolución:

Sean las cantidades A, B y C.

$$100\begin{cases} A & m^2 \Rightarrow A = m^2 . k \\ B & 2m \Rightarrow B = 2m . k \\ C & 1 \Rightarrow C = 1 . k \end{cases} \quad \text{(DP)}$$

Del dato: A + B + C = 100

$m^2 \times k + 2m \times k + 1 \times k = 100$

$k \times \underbrace{(m^2 + 2m + 1)}_{(m+1)^2} = 100 \quad \Rightarrow k = \frac{100}{(m+1)^2}$

Si $m > 2$, entonces la mayor cantidad es m^2.

Por dato: $m^2 \times k = 64 \Rightarrow m^2 \times \left(\frac{100}{(m+1)^2}\right) = 64$

$\left(\frac{10m}{m+1}\right)^2 = 64$

$\frac{10m}{m+1} = 8$

$\therefore m = 4$

5 Se reparten 29 700 DP a todos los números impares de 2 cifras. ¿Cuánto le tocó a 51?

Resolución:

$$29\,700\begin{cases} 11 \\ 13 \\ \vdots \\ 97 \\ 99 \end{cases} \quad \text{(DP)}$$

Hallamos la constante de proporcionalidad:

$k = \frac{\text{Número}}{\text{Suma de índices}} = \frac{29\,700}{11 + 13 + ... + 99} = 12$

$\therefore$ A 51 le tocó: 51k = 51(12) = 612

6 Con 6 hombres o 15 mujeres se puede hacer una obra en 24 días. ¿Cuántas mujeres habrá que agregar a un grupo de 4 hombres para hacer dicha obra en 18 días?

Resolución:

Se observa que a mayor número de personas, menor será el tiempo en que podrán terminar la obra; y viceversa.

Entonces:

(n.° de días) IP (n.° de hombres)

Luego:

(n.° de días) $\times$ (n.° de hombres) = k (constante)

$24 \times 6 = 18 . x \Rightarrow x = 8$ hombres

Para completar el grupo faltan 4 hombres.

Por dato:

6 hombres < > 15 mujeres

4 hombres < > 10 mujeres

Por lo tanto, al grupo se le deberá agregar 10 mujeres.

7 La eficiencia se mide en puntos y es DP a los años de servicio e IP a la raíz cuadrada de la edad del trabajador. Se sabe que la eficiencia de Juan es de dos puntos cuando tiene un año de servicio y 25 años de edad. ¿Cuál será su eficiencia a los 36 años?

Resolución:

E: eficiencia, A: años de servicio, e: edad

Del enunciado: $\frac{E . \sqrt{e}}{A} = \text{cte.}$

Por dato:

$E_1 = 2; E_2 = ?; A_1 = 1; A_2 = 12; e_1 = 25; e_2 = 36$

Reemplazando:

$\frac{2 . \sqrt{25}}{1} = \frac{E_2 . \sqrt{36}}{12} \quad \therefore E_2 = 20$

REGLA DE TRES

DEFINICIÓN

La regla de tres es un procedimiento aritmético que permite calcular algún valor desconocido luego de comparar varias magnitudes. De acuerdo al número de magnitudes que intervienen en una regla de tres, esta puede ser simple o compuesta.

REGLA DE TRES SIMPLE

Cuando en la comparación intervienen solo dos magnitudes. A su vez puede ser:

Directa	Inversa
Si las magnitudes comparadas son directamente proporcionales.	Si las magnitudes que intervienen en el problema son inversamente proporcionales.
Magnitud A → Magnitud B: a_1 → x; a_2 → b_1	Magnitud A → Magnitud B: a_1 → b_1; a_2 → x
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a_2 \times b_1}{a_1}}$	$a_1 \times b_1 = a_2 . x \Rightarrow \boxed{x = \frac{a_1 \times b_1}{a_2}}$

Recuerda

Sean las magnitudes A y B.

1. Si A DP B, entonces:
$$\frac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{cte.}$$
2. Si A IP B, entonces:
$$(\text{Valor de A}) \times (\text{Valor de B}) = \text{cte.}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Cuando en la comparación intervienen más de dos magnitudes.

Ejemplo:
Si 12 máquinas pueden producir 35 000 lapiceros en 21 horas, ¿en cuánto tiempo 24 máquinas podrán producir 60 000 lapiceros?

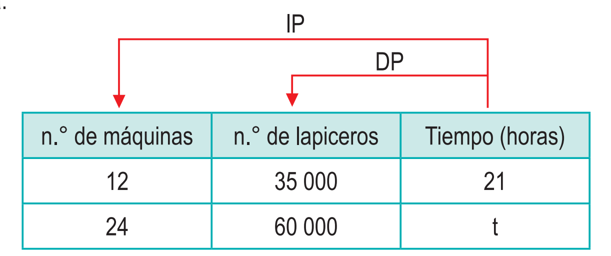
Resolución:
Ordenando las magnitudes y los valores, tenemos:

n.° de máquinas	n.° de lapiceros	Tiempo (horas)
12	35 000	21
24	60 000	t

En el cuadro podemos observar que la incógnita aparece en la columna de la magnitud tiempo. Ahora, al comparar esta magnitud con cada una de las otras dos magnitudes, se tiene:

- (Tiempo) DP (n.° de lapiceros)
- (Tiempo) IP (n.° de máquinas)

Luego, en el esquema:



n.° de máquinas	n.° de lapiceros	Tiempo (horas)
12	35 000	21
24	60 000	t

Entonces:

$$\frac{12 \times 21}{35\,000} = \frac{24 \times t}{60\,000}$$

$$t = 18$$

∴ En 18 horas, 24 máquinas podrán producir 60 000 lapiceros.

Observación

Si A es directamente proporcional a B cuando C es constante y A es inversamente proporcional a C cuando B es constante, entonces:

$$\frac{A \times C}{B} = \text{cte.}$$

En el ejemplo:

$$\frac{(\text{n.° de máquinas}) \times (\text{tiempo})}{(\text{n.° de lapiceros})} = \text{cte.}$$

Problemas resueltos

1 Un depósito lleno de gasolina cuesta 275 soles. Si se saca de él 85 litros cuesta 150 soles. ¿Cuántos litros contenía el depósito?

Resolución:

DP

Litros	Precio
x	275
x − 85	150

$x - 85 = x \cdot \frac{150}{275} \Rightarrow x = 187$

2 Durante 3 días y 8 horas se consumen los 2/5 del volumen de un tanque de agua. ¿En cuánto tiempo se consumirán los 3/4 de lo que queda del tanque?

Resolución:

3 días y 8 horas equivalen a: 80 h

DP

Horas	Volumen
80	$\frac{2}{5}$
x	$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)$

$\frac{2}{5}x = 80 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \Rightarrow 2x = \frac{9 \times 80}{4} \Rightarrow x = 90$ horas

Luego, 90 horas equivalen a 3 días y 18 horas.

3 Un ganadero tiene 420 ovejas que puede alimentar por 80 días, después de x días vende 70 ovejas y los alimentos duran 12 días más de lo que iban a durar. ¿Cuál es el valor de x?

Resolución:

Ovejas (IP)	Días	Alimento (DP)
420	x	$\frac{x}{80}$
350	92 − x	$\frac{80-x}{80}$

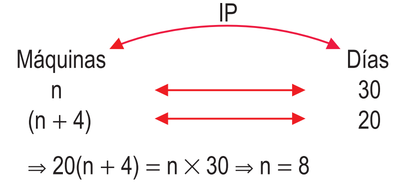
$92 - x = x\left(\frac{420}{350}\right)\left(\frac{80-x}{x}\right)$

$92 - x = (80 - x)\frac{6}{5} \Rightarrow 460 - 5x = 480 - 6x \Rightarrow x = 20$

Luego, el valor de x es 20.

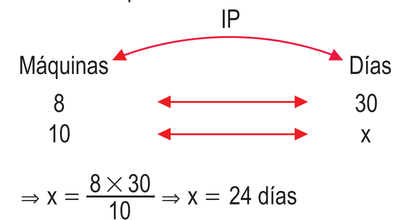
4 Si n máquinas hacen una obra en 30 días; (n + 4) máquinas hacen la misma obra en 20 días; ¿en cuánto tiempo (n + 2) máquinas harán dicha obra?

Resolución:



$\Rightarrow 20(n + 4) = n \times 30 \Rightarrow n = 8$

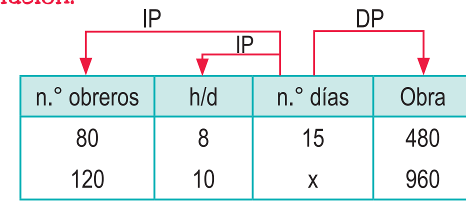
Ahora reemplazando:



$\Rightarrow x = \frac{8 \times 30}{10} \Rightarrow x = 24$ días

5 Si 80 obreros trabajando 8 horas diarias construyen 480 m^2 de una obra en 15 días. ¿Cuántos días se requieren para que 120 obreros trabajando 10 horas diarias realicen 960 m^2 de la misma obra?

Resolución:

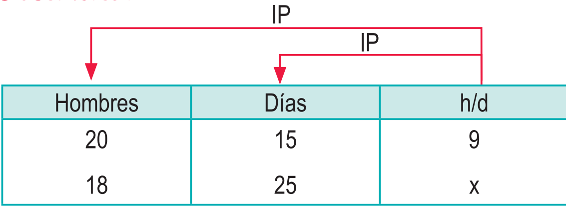


n.° obreros	h/d	n.° días	Obra
80	8	15	480
120	10	x	960

$x = 15 \times \frac{80}{120} \times \frac{8}{10} \times \frac{960}{480} \Rightarrow x = 16$ días

6 20 hombres trabajando 9 horas diarias pueden hacer una obra en 15 días. 18 hombres de igual eficiencia, en cuántas horas diarias pueden hacer la misma obra en 25 días.

Resolución:



Hombres	Días	h/d
20	15	9
18	25	x

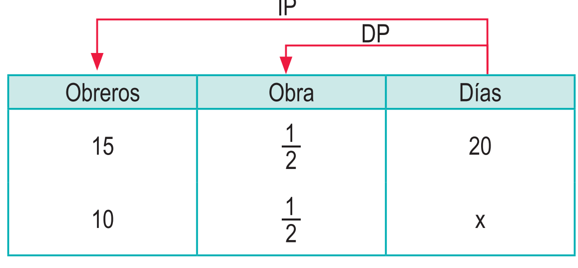
$x = 9 \times \frac{20}{18} \times \frac{15}{25}$

$\therefore\ x = 6$ h/d

7 Quince obreros han hecho la mitad de un trabajo en veinte días. En un momento abandonan el trabajo 5 obreros. ¿Cuántos días tardarán en terminar el trabajo los obreros que quedan?

Resolución:

Del enunciado:



Obreros	Obra	Días
15	$\frac{1}{2}$	20
10	$\frac{1}{2}$	x

$15 \times \frac{1}{2} \times 20 = 10 \times \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow \therefore x = 30$ días

TANTO POR CIENTO

A

DEFINICIÓN

Se denomina tanto por ciento a la cantidad de partes que se toman en cuenta de un cierto número dividido en 100 partes iguales.

Ejemplo:
Si tomamos 40 de 100 partes en las que ha sido dividido 300, entonces se dice:

40 por ciento de 300 $<> \frac{40}{100} \times 300 = 40\%(300)$

Gráficamente: 300 $<>$ 100 partes iguales a $\frac{300}{100}$

$\frac{300}{100}$	$\frac{300}{100}$	$\frac{300}{100}$	...	$\frac{300}{100}$	$\frac{300}{100}$	...	$\frac{300}{100}$	$\frac{300}{100}$	$\frac{300}{100}$

40 partes

En general:

$$\text{a por ciento de N} <> \frac{a}{100}N = a\%N$$

Atención

$\frac{1}{100} <> 1\%$

$1 <> 100\%$

$\frac{1}{2} <> 50\%$

$\frac{1}{4} <> 25\%$

$\frac{3}{4} <> 75\%$

PORCENTAJE

Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

Ejemplos:

- $25\%(200) = \frac{25}{100} \times 200 = 50$
- $40\%(550) = \frac{40}{100} \times 550 = 220$

Nota

$\underbrace{25\%(200)}_{\text{Tanto por ciento}} = \underbrace{50}_{\text{Porcentaje}}$

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

1. $a\%N + b\%N = (a + b)\%N$
2. $a\%N - b\%N = (a - b)\%N$
3. $a \times (b\%\ N) = (a \times b)\%N$
4. El a% del b% del c% de N es: $a\%b\%c\%N$

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

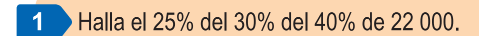
Entendemos por descuentos (o aumentos) sucesivos a aquellos descuentos (o aumentos) que se van efectuando uno a continuación del otro, considerando como el nuevo 100% a la cantidad que va quedando o formando.

Descuento único	Aumento único
Dos descuentos del $d_1\%$ y $d_2\%$ equivalen a un descuento único de: $\left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$ Ejemplo: Si al precio de una computadora que cuesta S/.2500 se le hace dos descuentos sucesivos del 10% y 30%, ¿cuál es el descuento único?, ¿cuál será su nuevo precio? Resolución: Descuento único $= \left(10 + 30 - \frac{10 \times 30}{100}\right)\% = 37\%$ Nuevo precio $= 2500 - 37\%(2500) =$ S/.1575	Dos aumentos sucesivos del $a_1\%$ y $a_2\%$ equivalen a un aumento único de: $\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$ Ejemplo: Si el precio de una lavadora es de S/.1500 y sufre dos aumentos sucesivos del 15% y 20%, ¿cuál es el aumento único?, ¿cuál será su nuevo precio? Resolución: Aumento único $= \left(15 + 20 + \frac{15 \times 20}{100}\right)\% = 38\%$ Nuevo precio $= 1500 + 38\%(1500) =$ S/.2070

Observación

Ejemplos:
- $25\%N + 5\%N = 30\%N$
- $36\%N - 6\%N = 30\%N$
- $4 \times (13\%N) = 52\%N$

Casos especiales
$N + a\%N = (100 + a)\%N$
$N - b\%N = (100 - b)\%N$



Problemas resueltos

1 Halla el 25% del 30% del 40% de 22 000.

Resolución:

$$25\%\ 30\%\ 40\%\ (22\ 000) = \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} \times 22\ 000$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} \times 22\ 000 = 660$$

2 Si el 25% del 20% de un número es 60, halla la mitad del número.

Resolución:

$25\% \times 20\% \times x = 60$

$\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} \times x = 60 \Rightarrow x = 1200$

Nos piden: $\frac{x}{2} = \frac{1200}{2} = 600$

3 ¿De qué número es 384 el 4% menos?

Resolución:

$\Rightarrow \underbrace{x - 4\%x}_{} = 384$

$96\%x = 384$

$\frac{96}{100}x = 384 \Rightarrow x = 400$

4 Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería S/.156. ¿Cuánto tengo?

Resolución:

Sea N el dinero que tengo.

Gasto el 30%N, entonces me queda: 70%N

Luego gano el 28%(70%N), esto es: $\frac{28}{100} \times \frac{70}{100} \times N = 19{,}6\%N$

Ahora tengo: $70\%N + 19{,}6\%N = 89{,}6\%N$

Estoy perdiendo: $100\%N - 89{,}6\%N = 10{,}4\%N$

Por dato: $\frac{10{,}4}{100} \times N = 156$

$\therefore\ N = S/.1500$

5 El 20% de $(x + y)$ es igual al 40% de $(2x - y)$. ¿Qué tanto por ciento representa $(12x + 15y)$ respecto a $(12y - 3x)$?

Resolución:

El enunciado en lenguaje matemático:

$20\%(x + y) = 40\%(2x - y)$

$(x + y) = 2(2x - y)$

$x + y = 4x - 2y$

$3y = 3x \Rightarrow x = y$

Por regla de tres para la respuesta:

$12y - 3x \longrightarrow 100\%$

$12x + 15y \longrightarrow z$

$$z = \frac{(12x + 15y)\,100\%}{12y - 3x} = \left(\frac{12x + 15x}{12x - 3x}\right)100\% = \frac{27x}{9x}(100\%)$$

$\therefore\ z = 300\%$

6 A un número se le hace 3 descuentos sucesivos del 25%; 20% y 20%; al número que resulta se le hace 3 incrementos sucesivos del 60%; 25% y 20%; resultando un número que se diferencia del original en 608 unidades. Halla el número original.

Resolución:

Sea N el número buscado.

Por dato: $80\%(80\%(75\%N)) = \frac{12N}{25}$

Ahora: $120\%(125\%(160\%\frac{12N}{25})) = \frac{144N}{125}$

Luego: $\frac{144}{125}N - N = 608$

$\therefore N = 4000$

7 De un conjunto de 400 personas, el 70% son hombres y el resto son mujeres. Sabiendo que el 80% de los hombres y el 75% de las mujeres son extranjeros, ¿cuántas personas no son extranjeras en dicho conjunto?

Resolución:

Total de personas: 400

$H = 70\%(400) = \frac{70}{100} \cdot 400 \Rightarrow H = 280$

$\Rightarrow M = 400 - 280$

$M = 120$

Por dato:

Hombres extranjeros = 80%(280) = 224

Hombres no extranjeros = 280 – 224 = 56

Además:

Mujeres extranjeras = 75%(120) = 90

Mujeres no extranjeras = 120 – 90 = 30

$\therefore$ Personas que no son extranjeras: 56 + 30 = 86

8 El costo de la mano de obra y las indemnizaciones suman el 40% del valor de una obra. Si las indemnizaciones representan el 60% del importe de la mano de obra. ¿Qué tanto por ciento del valor de la obra representa solamente la mano de obra?

Resolución:

M: mano de obra; I: indemnización; O: valor de obra

Dato:

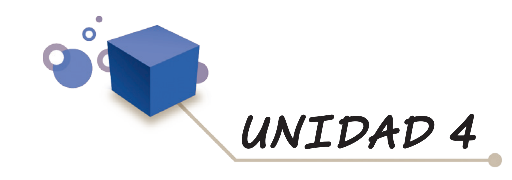
$M + I = 40\%O$ ...(1) $\qquad I = 60\%M$ ...(2)

(2) en (1):

$60\%M + M = 40\%\ O$

$160\%M = 40\%O \Rightarrow 4M = O$

Piden: $\frac{x}{100}(O) = M \Rightarrow x\%(4M) = M \Rightarrow x\% = 25\%$



UNIDAD 4

PROMEDIOS

Se llama promedio a una cantidad representativa de un conjunto de datos, que está comprendida entre el menor y mayor de estos.

PROMEDIOS IMPORTANTES

Promedio aritmético ($\overline{MA}$)

Llamado también media aritmética. Su cálculo se realiza de la siguiente manera, con los datos:

$$a_1; a_2; a_3; ... ; a_n$$

La media aritmética de dichos números es:

$$\overline{MA} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

Ejemplo:
Un alumno ha obtenido las siguientes notas en el curso de Aritmética: 12; 14; 10; 13 y 11.
¿Cuál es su promedio de notas?

$$\overline{MA} = \frac{12 + 14 + 10 + 13 + 11}{5} = \frac{60}{5}$$

$$\overline{MA} = 12$$

Promedio ponderado (P)

Es el promedio aritmético de un conjunto de números que se repiten bajo una cierta frecuencia, peso o ponderación.
Sean los datos $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ y sus respectivos pesos $P_1; P_2; P_3; ...; P_n$, entonces su promedio ponderado es:

$$P = \frac{a_1 \times P_1 + a_2 \times P_2 + ... + a_n \times P_n}{P_1 + P_2 + ... + P_n}$$

Ejemplo:
Halla el promedio ponderado de los números:
8; 12; 5; 8; 5; 5; 12; 12 y 5.

Número	Frecuencia
5	4
8	2
12	3

$$P = \frac{5 \times 4 + 8 \times 2 + 12 \times 3}{4 + 2 + 3}$$

$$P = 8$$

Promedio geométrico ($\overline{MG}$)

Llamado también media geométrica. Su cálculo se realiza de la siguiente manera, sean los datos:

$$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$$

La media geométrica de dichos números es:

$$\overline{MG} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}$$

Ejemplo:
Halla la media geométrica de 4; 6 y 9.

$$\overline{MG} = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 9} = \sqrt[3]{216}$$

$$\overline{MG} = 6$$

Promedio armónico ($\overline{MH}$)

Llamado también media armónica. Su cálculo se realiza de la siguiente manera, sean los datos:

$$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$$

La media armónica de dichos números es:

$$\overline{MH} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:
Halla la media armónica de 8; 12 y 16.

$$\overline{MH} = \frac{3}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}} = \frac{3}{\frac{13}{48}} \Rightarrow \overline{MH} = 11,08$$

PROPIEDADES DE LOS PROMEDIOS ESTUDIADOS ($\overline{MA}$; $\overline{MG}$ Y $\overline{MH}$)

Para un conjunto de dos o más datos

1. Si dichos datos son iguales, entonces la media aritmética, geométrica y armónica son iguales; es decir:

$$\overline{MA} = \overline{MG} = \overline{MH}$$

2. Si dichos datos son diferentes, entonces la media aritmética es mayor que la media geométrica y este a su vez es mayor que la media armónica; es decir:

$$\overline{MA} > \overline{MG} > \overline{MH}$$

Solo para dos datos

El producto de la media aritmética y la media armónica es igual a la media geométrica elevado al cuadrado; es decir:

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = \overline{MG}^2$$

Observación

Sean los datos:

$$x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$$

Si P es un promedio de dichos números, se cumple:

$$x_1 < P < x_n$$

Atención

Para dos datos a y b, se tiene:

- $\overline{MA} = \frac{a + b}{2}$
- $\overline{MG} = \sqrt{ab}$
- $\overline{MH} = \frac{2ab}{a + b}$

Nota

De las propiedades se puede concluir que el mayor promedio de un conjunto de datos es la $\overline{MA}$ de estos y el menor promedio de dichos datos es su $\overline{MH}$.

Problemas resueltos

1 Calcula el promedio armónico de los números:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{20}$

Resolución:

$$\overline{MH} = \cfrac{20}{\cfrac{1}{1} + \cfrac{1}{\frac{1}{2}} + \cfrac{1}{\frac{1}{3}} + \cfrac{1}{\frac{1}{4}} + ... + \cfrac{1}{\frac{1}{20}}}$$

$$\overline{MH} = \frac{20}{1 + 2 + 3 + 4 + ... + 20}$$

$$\overline{MH} = \cfrac{20}{\frac{20(21)}{2}} \Rightarrow \overline{MH} = \frac{2}{21}$$

2 El promedio aritmético de 100 números consecutivos es 69,5. Halla el número menor.

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + ... + (x+99)}{100} = 69,5$$

De donde:

$$100x + (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99) = 6950$$

$$100x + \frac{99(99+1)}{2} = 6950$$

$$100x + 4950 = 6950$$

$$100x = 2000 \Rightarrow x = 20$$

∴ El número menor es 20.

3 Sean a y b dos números enteros positivos; si el producto de la media aritmética con su media armónica es igual al doble de su media geométrica, entonces el menor valor de (a + b) es:

Resolución:

Del enunciado: $\overline{MA}(a; b) \times \overline{MH}(a; b) = 2\overline{MG}(a; b)$

Por propiedad de las medias:

$$\overline{MG}^2(a; b) = \overline{MA}(a; b) \times \overline{MH}(a; b)$$

$$\Rightarrow \overline{MG}^2(a; b) = 2\overline{MG}(a; b)$$

$$\overline{MG}(a; b) = 2 \Rightarrow a \,.\, b = 4 \text{ (a y b} \in \mathbb{Z}^+)$$

Luego:

$a = 1 \wedge b = 4 \Rightarrow a + b = 5$

$a = 2 \wedge b = 2 \Rightarrow a + b = 4$

∴ El menor valor de (a + b) es 4.

4 De 500 alumnos de un colegio cuya estatura promedio es de 1,67 m; 150 son mujeres. Si la estatura promedio de las mujeres es 1,60 m, calcula la estatura promedio de los varones de dicho grupo.

Resolución:

Sean p_1, p_2 y p, respectivamente, la estatura promedio de las mujeres, varones y del total de estudiantes. Considere n_1, n_2 y n el número de mujeres, varones y el total de estudiantes, respectivamente.

Entonces: $p = \frac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2}$; $n_1 + n_2 = n$

De los datos: $1,67 = \frac{(150)(1,60) + (350)(p_2)}{500}$

$$835 = 240 + 350p_2 \Rightarrow p_2 = 1,70$$

∴ La estatura promedio de los varones es 1,70 m.

5 La suma de las edades de los alumnos de un salón de clase es 2000 y su promedio es 20. Si a cada hombre se le agrega 6 años y a cada mujer se le resta 3 años, el nuevo promedio es 22,4. Halla el número de hombres.

Resolución:

Del enunciado:

Suma de edades: $E_H + E_M = 2000 \wedge \overline{MA} = 20$

$$\frac{E_H + E_M}{H + M} = 20$$

$$\frac{2000}{H + M} = 20 \Rightarrow H + M = 100 \qquad ...(1)$$

Además, agregando y restando años a cada hombre y mujer, tenemos:

$$\frac{2000 + 6H - 3M}{H + M} = 22,4 \text{ (nuevo promedio)}$$

$$2000 + 6H - 3M = 22,4(H + M) = 2240$$

$$6H - 3M = 240 \Rightarrow 2H - M = 80 \qquad ...(2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$3H = 180 \Rightarrow H = 60$

∴ El número de hombres es 60.

6 El promedio aritmético de las edades de 4 hombres es 48. Si ninguno de ellos es menor de 45 años, ¿cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos?

Resolución:

Sean x_1; x_2; x_3; x, las edades de los 4 hombres.

Del enunciado:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x}{4} = 48 \qquad ...(1)$$

Además, si ninguno es menor de 45 años se cumple:

$x_1 \geq 45$; $x_2 \geq 45$; $x_3 \geq 45$; $x \geq 45$

De (1) para que x sea máximo, se debe cumplir:

$x_1 + x_2 + x_3 = \text{mínimo} \qquad ...(2)$

↓ ↓ ↓

45 45 45

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{45 + 45 + 45 + x}{4} = 48$$

$$135 + x = 192 \Rightarrow x = 57$$

∴ La edad máxima que podría tener uno de ellos es 57 años.

A

DEFINICIÓN

Es una colección de métodos para planear experimentos, obtener datos y después organizar, resumir, presentar, analizar, interpretar y llegar a conclusiones basadas en los datos.

CLASES DE ESTADÍSTICA

La estadística puede dividirse en dos amplias ramas: estadística descriptiva y estadística inferencial.

Estadística descriptiva

Es la parte de la estadística que se encarga de la recolección, clasificación, descripción y simplificación de los datos. En otras palabras, podemos expresar que un estudio estadístico se considera descriptivo cuando solo se pretende analizar y describir los datos.

Estadística inferencial

La estadística inferencial es el conjunto de técnicas y métodos que son usados para obtener conclusiones generales acerca de una población usando datos de una muestra tomada de ella.

Atención

Población

Muestra

CONCEPTOS EMPLEADOS EN ESTADÍSTICA

Población

Es el conjunto sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones. Normalmente es demasiado grande para poder abarcarlo.
Ejemplo:
Población de estaturas de todos los alumnos del nivel primario de las I. E. del departamento de Trujillo.

Muestra

Es un subconjunto de la población al que tenemos acceso y sobre el que realmente hacemos las observaciones.
Ejemplo:
Muestra de estaturas de los alumnos del nivel primario de una determinada I. E. del departamento de Trujillo.

VARIABLES ESTADÍSTICAS

Una variable es una característica observable que varía entre los diferentes individuos de una población. La información que disponemos de cada individuo es resumida en variables.

Nota

Debes tener en cuenta que una variable estadística es una característica de la población que interesa al investigador.

CLASIFICACIÓN

Variable cualitativa

Las variables cualitativas (o categóricos o de atributo) se dividen en diferentes categorías que se distinguen por alguna característica no numérica. Se clasifica en:

- **Variable cualitativa nominal.** Cuando se definen categorías y no llevan ninguna ordenación en la posibles modalidades.

  Ejemplos: estado civil, color preferido, partidos políticos, etc.

- **Variable cualitativa ordinal.** Cuando más allá de la clasificación, se busca ordenar los casos en términos del grado que poseen cada característica.

  Ejemplos: nivel de educación alcanzado, nivel socioeconómico, etc.

Variable cuantitativa

Las variables cuantitativas consisten en números que representan conteos o mediciones y, en consecuencia, son ordenables. A su vez las variables cuantitativas se subdividen en dos tipos:

- **Variables discretas.** Son aquellas variables que se obtienen por el procedimiento de conteo (toman valores naturales).

  Ejemplos: número de hijos, número de monedas que una persona lleva en el bolsillo.

- **Variables continuas.** Son aquellas variables que pueden tomar cualquier valor de un cierto intervalo (entre dos números fijados).

  Ejemplos: peso, estatura, temperatura, etc.

Observación

Una variable cuantitativa se obtiene como resultado de mediciones o conteos.

DATO ESTADÍSTICO

Es un valor particular de la variable, los cuales han sido recopilados como resultado de observaciones. Estos pueden ser comparados y analizados.

Ejemplos:
Número de hijos: 0; 1; 2; ...
Estatura de alumnos de una I. E.: 1,75; 1,65; 1,50; ...

Recuerda

Fundamentalmente para presentar los datos estadísticos se usa la forma tabular, los gráficos se utilizan complementariamente para ilustrar mediante figuras, el comportamiento de las variables.

PARÁMETRO

Es una cantidad numérica calculada que se usa para describir alguna característica de una población.

Ejemplo: la estatura promedio de los individuos de un país.

PRESENTACIÓN DE DATOS

Hay dos formas de presentar los datos estadísticos:

1. En forma tabular: cuadros y tablas de frecuencia.
2. Mediante gráfico y diagramas.

Cuadro estadístico

Consta de ocho partes: número de cuadro, título, concepto o encabezamiento, cuerpo del cuadro, nota de pie de páginas o llamadas, fuente, nota de unidad de medida y elaboración.

Ejemplo:

CUADRO 1
Perú: población con algún problema de salud, según lugar o establecimiento de consulta.
Trimestre: enero-febrero-marzo 2011-2012
(Porcentaje)

Lugar o establecimiento	ene-feb-mar 2011 P/	ene-feb-mar 2012 P/	Variación absoluta (Puntos porcentuales)
MINSA 1/	17,1	15,9	–1,2
EsSalud 2/	6,6	6,4	–0,2
MINSA y EsSalud	0,1	0,1	0,0
FF. AA. y/o Policía Nacional	0,3	0,6	0,3
Particular 3/	7,6	8,8	1,2
Farmacia o botica	16,2	16,8	0,6
Domicilio	0,2	0,2	0,0
Otros 4/	1,2	0,8	–0,4
Total buscó atención	49,3	49,6	0,3

1/ Incluye centro de salud MINSA, puesto de salud MINSA, centro o puesto de salud CLAS y hospital MINSA.

2/ Incluye posta, policlínico y hospital de EsSalud.

3/ Incluye clínica particular y consultorio médico particular.

4/ Incluye curandero.

P/ Preliminar.

Fuente: INEI - Encuesta Nacional de Hogares 2011-2012

Observación

De la tabla de frecuencias:

X_i	f_i	h_i	F_i	H_i
X_1	f_1	h_1	F_1	H_1
X_2	f_2	h_2	F_2	H_2
X_3	f_3	h_3	F_3	H_3
X_4	f_4	h_4	F_4	H_4
	n			

Se cumple:

- $h_1 = \frac{f_1}{n}; h_2 = \frac{f_2}{n}, h_3 = \frac{f_3}{n}; h_4 = \frac{f_4}{n}$
- $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$
- $F_1 = f_1$
  $F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2$
  $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3$
  $F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = F_3 + f_4$
- $H_1 = h_1$
  $H_2 = h_1 + h_2 = H_1 + h_2$
  $H_3 = h_1 + h_2 + h_3 = H_2 + h_3$
  $H_4 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H_3 + h_4$

Tablas estadísticas

Llamadas también tablas de frecuencia; son aquellas que presentan la distribución de un conjunto de datos previamente tabulados, los cuales están agrupados o clasificados en las diversas categorías o variables.

Elementos

Rango (R). Llamado también "recorrido de la variable"; es igual a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores que forman las variables estadísticas.

$$R = X_{máx.} - X_{mín.}$$

Frecuencia absoluta (f_i). Es el número de veces que aparece repetida la variable estadística en el conjunto de observaciones realizadas.

Frecuencia relativa (h_i). Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato y el número de observaciones realizadas.

Frecuencia absoluta acumulada (F_i). Resulta de acumular sucesivamente las frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa acumulada (H_i). Resulta de acumular o sumar las frecuencias relativas.

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUANTITATIVAS

Realizadas las observaciones o recopilación de datos, denotamos la variable por X y los datos por: X_1; X_2; X_3; ...; X_n, donde X_i representa la i-ésima observación de la variable, y n es el número de observaciones realizadas.

En general, para construir una tabla de frecuencia, se requiere realizar dos operaciones:

1. **La clasificación,** que consiste en determinar las categorías y los distintos valores que toman las variables o los intervalos de clase.
2. **La tabulación,** que consiste en distribuir los elementos de la población en la respectiva categoría o intervalo de la variable.

Atención

En la tabulación se contabilizan cuántos elementos se encuentran comprendidos en cada intervalo.

TABLAS DE FRECUENCIA DE VARIABLES DISCRETAS

Ejemplo:

Los siguientes datos corresponden a las edades (en años) de los alumnos que integran el coro de una I. E.

16	13	14	14	15	15	16	14	15	16
15	14	15	13	14	13	15	13	14	14

n.° de observaciones: n = 20

Variable: X_i = edades de los alumnos que integran el coro de una I. E.

$X_1 = 16$ $X_2 = 13$ $X_3 = 14$ $X_4 = 14$ $X_5 = 15$ $X_6 = 15$ $X_7 = 16$ $X_8 = 14$ $X_9 = 15$ $X_{10} = 16$

$X_{11} = 15$ $X_{12} = 14$ $X_{13} = 15$ $X_{14} = 13$ $X_{15} = 14$ $X_{16} = 13$ $X_{17} = 15$ $X_{18} = 13$ $X_{19} = 14$ $X_{20} = 14$

Clasificación:

X_i: 13; 14; 15; 16 $\Rightarrow$ $X_{mín.} = 13$; $X_{máx.} = 16$

Tabulación

CUADRO 2

Distribución de las edades de los 20 alumnos que integran el coro de una I. E.

Edades (X_i)	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
13	||||	4	4	0,20	0,20
14	~~||||~~ ||	7	11	0,35	0,55
15	~~||||~~ |	6	17	0,30	0,85
16	|||	3	20	0,15	1
Fuente: propia		n = 20		1	

Observación

La tabla de frecuencias:

X_i	f_i
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
X_4	f_4
X_5	f_5

es simétrica si:
$f_1 = f_5 \wedge f_2 = f_4$

TABLAS DE FRECUENCIA DE VARIABLES CONTINUAS

Ejemplo:

Los siguientes datos corresponden a los sueldos quincenales (en soles) de los empleados de la empresa Pepito S. A.

410	400	420	450	490	480	405	698	610	612
600	590	608	710	550	510	611	570	740	560
580	690	724	819	530	590	520	739	910	1000
680	540	824	830	610	754	595	908	599	840

n.° de observaciones: n = 40

Variable: X_i = sueldos quincenales

Atención

Si los datos toman valores racionales, se acostumbra presentarlos utilizando **intervalos de clase** en las tablas de frecuencia.

Nota

El número de intervalos (K) es arbitrario, sin embargo, es recomendable tener en cuenta ciertos criterios:

- Naturaleza de la variable.
- Número de valores observados.
- El recorrido de la variable.
- Unidad de medida de la variable.
- Los objetivos del estudio.

Observación

En el cuadro 3, se observa que:
$F_6 = 40$

Además:
$H_6 = 1$

En general, se cumple:
$F_K = n \wedge H_K = 1$

1. Determinamos el valor mínimo y máximo de X para luego hallar el rango (R).

$X_{mín.} = 400; X_{máx.} = 1000 \Rightarrow R = X_{máx.} - X_{mín.} = 1000 - 400 = 600$

2. Hallamos el número de intervalos (K), para esto podemos emplear la **regla de Sturges**:

$$K = 1 + 3{,}322\log(n)$$

Para el ejemplo:

$$K = 1 + 3{,}322\log(40) = 6{,}32 \approx 6$$

3. Determinamos la amplitud de los intervalos (c), de la siguiente manera:

$$c = \frac{R}{K} = \frac{X_{máx.} - X_{mín.}}{K}$$

Para el ejemplo:

$$c = \frac{1000 - 400}{6} = 100$$

4. Construimos los intervalos:

$[L_i; L_S\rangle$
$[400; 500\rangle$
$[500; 600\rangle$
$[600; 700\rangle$
$[700; 800\rangle$
$[800; 900\rangle$
$[900; 1000]$

5. Se calcula el punto medio de cada intervalo, llamado marca de clase (x_i), para finalmente organizarlas en una tabla.

I_i	X_i	
$[400; 500\rangle$	450	← $\frac{400 + 500}{2}$
$[500; 600\rangle$	550	← $\frac{500 + 600}{2}$
$[600; 700\rangle$	650	← $\frac{600 + 700}{2}$
$[700; 800\rangle$	750	← $\frac{700 + 800}{2}$
$[800; 900\rangle$	850	← $\frac{800 + 900}{2}$
$[900; 1000]$	950	← $\frac{900 + 1000}{2}$

6. Finalmente, realizamos la tabulación:

CUADRO 3
Distribución de los sueldos quincenales de los empleados de la empresa Pepito S. A.

I_i	X_i	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
$[400; 500\rangle$	450	𝍸 II	7	7	0,175	0,175
$[500; 600\rangle$	550	𝍸 𝍸 II	12	19	0,30	0,475
$[600; 700\rangle$	650	𝍸 IIII	9	28	0,225	0,700
$[700; 800\rangle$	750	𝍸	5	33	0,125	0,825
$[800; 900\rangle$	850	IIII	4	37	0,1	0,925
$[900; 1000]$	950	III	3	40	0,075	1
Fuente: propia			n = 40		1	

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUALITATIVAS

En el caso de variables cualitativas no se pueden calcular las frecuencias acumuladas, pues no es posible ordenar de menor a mayor datos no numéricos.

Ejemplo:
Los siguientes datos corresponden a los estados civiles de 20 personas encuestadas.

S	C	C	S	V	D	D	S	C	S
D	S	C	C	S	C	S	S	C	S

Donde:
S: soltero, C: casado, D: divorciado, V: viudo.
Como resultado de la clasificación y tabulación, se tiene:

CUADRO 4
Distribución de los estados civiles de 20 personas encuestadas.

Estado civil	f_i	h_i
Soltero	9	0,45
Casado	7	0,35
Divorciado	3	0,15
Viudo	1	0,05
Fuente: propia	n = 20	1

Atención

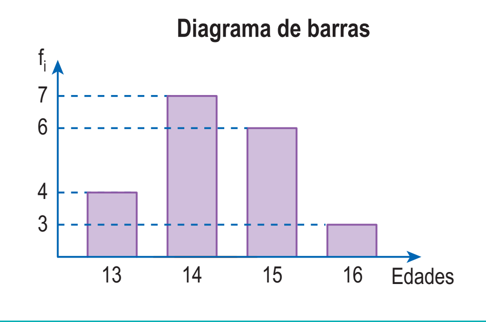
Un gráfico es un auxiliar de un cuadro estadístico, no lo sustituye, sino que lo complementa.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Un gráfico estadístico es la representación de un fenómeno estadístico por medio de figuras geométricas.

Representación gráfica de variables cuantitativas

Diagrama de barras



Histograma

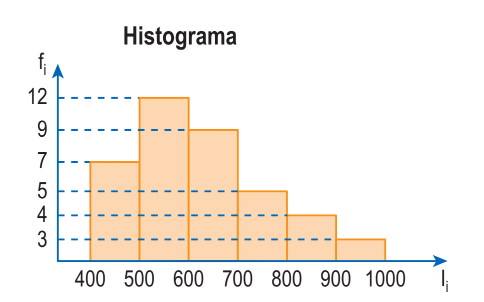
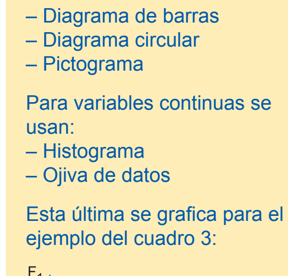


Diagrama circular



Pictogramas

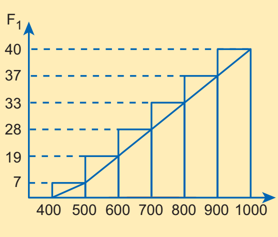
Si 🚶 = 1 persona, entonces:	
Alumnos de 13 años	
Alumnos de 14 años	
Alumnos de 15 años	
Alumnos de 16 años	

Recuerda

Para variables discretas se usan:
– Diagrama de barras
– Diagrama circular
– Pictograma

Para variables continuas se usan:
– Histograma
– Ojiva de datos

Esta última se grafica para el ejemplo del cuadro 3:



Representación gráfica de variables cualitativas

Diagrama de barras

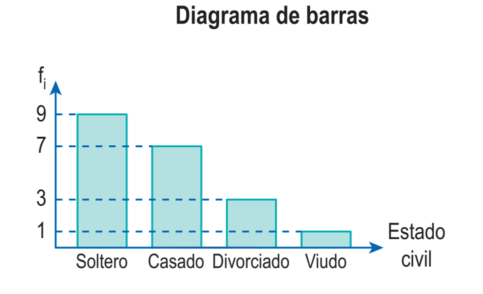
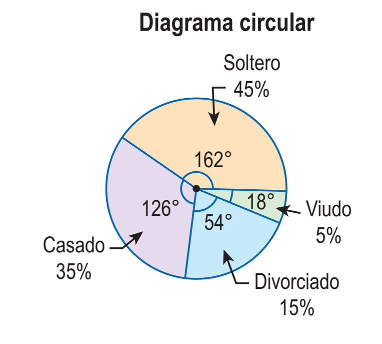


Diagrama circular



MEDIDAS DE POSICIÓN

1. Media o media aritmética ($\overline{X}$ o $\overline{MA}$)

A. Para datos no clasificados

Ejemplo:
Sean los datos (notas): 8; 7; 15; 20; 13

$$\overline{X} = \frac{8+7+15+20+13}{5} = \frac{63}{5} \Rightarrow \overline{X} = 12,6$$

B. Para datos clasificados

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i f_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} X_i h_i$$

Ejemplo:
Del cuadro 3: $\overline{X} = \dfrac{450 \times 7 + 550 \times 12 + 650 \times 9 + 750 \times 5 + 850 \times 4 + 950 \times 3}{40} = 640$

Nota

DEL CUADRO 3:

I_i	F_i	H_i	
[400; 500⟩	7	0,175	
[500; 600⟩	19	0,475	
[600; 700⟩	28	0,700	← Me
[700; 800⟩	33	0,825	
[800; 900⟩	37	0,925	
[900; 1000⟩	40	1	

$\frac{n}{2} = 20$

El intervalo de clase mediana, es aquel intervalo cuya frecuencia relativa acumulada sea igual o exceda por primera vez a 0,5.

2. Mediana (Me)

A. Para datos no clasificados

Ejemplo: sean los datos: 12; 17; 23; 4; 43, ordenando crecientemente: 4; 12; 17; 23; 43 $\Rightarrow$ Me = 17

17 → Dato central

B. Para datos clasificados

$$Me = L_m + c\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right]$$

Donde:

L_m: límite inferior de la clase mediana.

c: ancho de la clase mediana.

F_{m-1}: frecuencia absoluta acumulada de la clase precedente a la clase mediana.

f_m: frecuencia absoluta de la clase mediana.

Ejemplo:
Del cuadro 3: $Me = 600 + 100\left(\frac{20-19}{9}\right) = 611,\widehat{1}$

Observación:
La clase mediana es aquella cuya frecuencia absoluta acumulada es igual a la mitad de los datos o mayor a ella por primera vez y contiene a la mediana.

Observación

La moda (Mo) no siempre existe y no siempre es única.

3. Moda (Mo)

A. Para datos no clasificados

Ejemplo:
Sean los datos: 1; 20; 30; 100; 12; 18; 100; 18; 100 $\Rightarrow$ Mo = 100

B. Para datos clasificados

$$Mo = L_o + c\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Donde:

d_1: diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la frecuencia absoluta de la clase anterior.

d_2: diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la frecuencia absoluta de la clase siguiente.

L_o: límite inferior de las clase modal.

c: ancho de la clase modal.

Ejemplo: del cuadro 3: $Mo = 500 + 100\left(\frac{5}{5+3}\right) = 562,5$

Observación:
La clase modal es aquella cuya frecuencia absoluta es mayor.

Observación

DEL CUADRO 3:

I_i	f_i	
[400; 500⟩	7	
[500; 600⟩	12	← Mo
[600; 700⟩	9	
[700; 800⟩	5	
[800; 900⟩	4	
[900; 1000]	3	

El intervalo de clase modal, es aquel intervalo que tiene mayor frecuencia.

Problemas resueltos

A

1 Del siguiente cuadro de frecuencias:

I_i	f_i	F_i
[5; 11⟩	64	
[11; 17⟩	80	
[17; 23⟩		240
[23; 29⟩		
[29; 35]	72	400

Halla: $f_3 + f_4 + F_4$

Resolución:

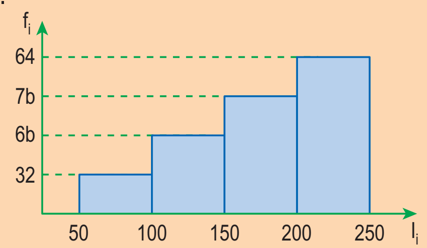
Completando el recuadro, tenemos:

I_i	f_i	F_i
[5; 11⟩	64	64
[11; 17⟩	80	144
[17; 23⟩	96	240
[23; 29⟩	88	328
[29; 35]	72	400

- $F_1 = 64 \Rightarrow F_2 = 144$
- $f_3 = F_3 - F_2 = 240 - 144$
  $\Rightarrow f_3 = 96$
- $F_4 = F_3 + f_4$
  $F_5 = F_4 + f_5$
  $400 = (240 + f_4) + 72 \Rightarrow f_4 = 88 \wedge F_4 = 328$

Piden: $96 + 88 + 328 = 512$

2 Se tiene la distribución de gastos semanales de un grupo de personas.



Si el gasto promedio semanal es de S/.163, ¿cuántas personas gastan entre S/.126 y S/.178?

Resolución:

Construimos la tabla de frecuencias con los datos del gráfico.

I_i	f_i	X_i
[50; 100⟩	32	75
[100; 150⟩	6b	125
[150; 200⟩	7b	175
[200; 250]	64	225

Del enunciado: $\overline{X} = 163$

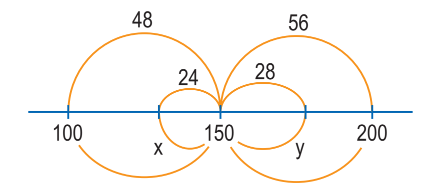
$$\frac{32 \times 75 + 6b \times 125 + 7b \times 175 + 64 \times 225}{96 + 13b} = 163$$

$$\frac{16\,800 + 1975b}{96 + 13b} = 163 \Rightarrow b = 8$$

Completando la tabla, tenemos:

I_i	f_i
[50; 100⟩	32
[100; 150⟩	48
[150; 200⟩	56
[200; 250]	64

Nos piden el número de personas que gastan entre S/.126 y S/.178, entonces:



Por proporcionalidad:

$\frac{x}{50} = \frac{24}{48}$ $\wedge$ $\frac{y}{50} = \frac{28}{56}$

$\Rightarrow x = 25$ $\Rightarrow y = 25$

Luego, el número de personas que gastan entre S/.126 y S/.178 semanalmente es:

$$x + y = 25 + 25 = 50$$

3 De la pregunta 2, halla la mediana.

Resolución:

En la tabla de frecuencias:

I_i	f_i	F_i	
[50 ; 100⟩	32	32	
[100 ; 150⟩	48	80	
[150 ; 200⟩	56	136	← Me (intervalo mediano)
[200 ; 250]	64	200	

$\frac{n}{2} = 100; \ c = 200 - 150 = 50$

Luego; en la fórmula: $Me = L_m + c\left(\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right)$

$$Me = 150 + 50\left(\frac{100 - 80}{56}\right) \therefore Me = 167{,}86$$

4 Del siguiente cuadro de frecuencia, halla la moda.

I_i	f_i
[140; 150⟩	50
[150; 160⟩	60
[160; 170⟩	70
[170; 180⟩	80
[180; 190]	40

Resolución:

Se identifica el intervalo modal, en la tabla de frecuencias:

I_i	f_i
[140; 150⟩	50
[150; 160⟩	60
[160; 170⟩	70
[170; 180⟩	80 ← Mo
[180; 190]	40

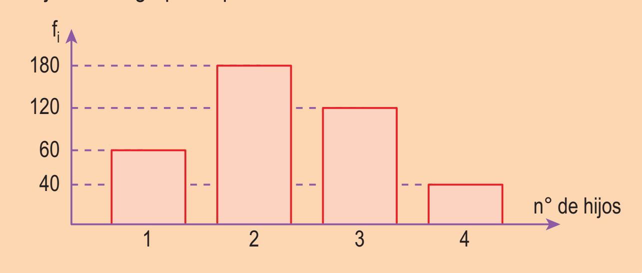
Ancho de clase:
$c = 180 - 170 = 10$

Además:
$d_1 = 80 - 70 = 10$
$d_2 = 80 - 40 = 40$

Luego, en la fórmula: $Mo = L_o + c \times \left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$

$$\therefore Mo = 170 + 10 \times \left(\frac{10}{10+40}\right) = 172$$

5 Se tiene el diagrama de barras de la distribución del número de hijos de un grupo de padres de familia. Halla la media.



Resolución:

Construimos la tabla de frecuencias con los datos del gráfico.

I_i	f_i
1	60
2	180
3	120
4	40
	400

Entonces:
$$\overline{X} = \frac{1 \times 60 + 2 \times 180 + 3 \times 120 + 4 \times 40}{400}$$

$\therefore \overline{X} \approx 2{,}35 = 2$

6 Del problema 5, halla la moda.

Resolución:

Observando el gráfico de barras, la mayor frecuencia (180) es: 2

$\therefore$ Mo = 2

7 Dada la siguiente tabla simétrica de distribución. Halla: $h_2 + \overline{X}$

I_i	h_i
[25; 45⟩	
[45; 65⟩	
[65; 85⟩	
[85; 105]	0,20

Resolución:

Completamos la tabla, teniendo en cuenta que es simétrica.

I_i	f_i	h_i	X_i
[25; 45⟩	a	0,2	35
[45; 65⟩	b		55
[65; 85⟩	b		75
[85; 105]	a	0,2	95

Donde el número de observaciones es: n

Se cumple: $n = 2(a + b)$

Además: $\overline{X} = \dfrac{35a + 55b + 75b + 95a}{2(a+b)} = \dfrac{130a + 130b}{2(a+b)}$

$$\overline{X} = \frac{130(a+b)}{2(a+b)} = \frac{130}{2} \Rightarrow \overline{X} = 65$$

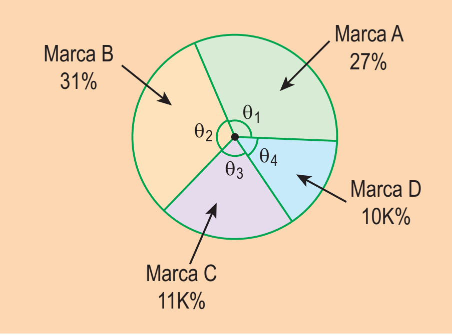
También:

$0{,}2 + 0{,}2 + h_2 + h_2 = 1$

$2h_2 = 0{,}6 \Rightarrow h_2 = 0{,}3$

$\therefore h_2 + \overline{X} = 0{,}3 + 65 = 65{,}3$

8 En el gráfico de barras se muestran las preferencias de 500 personas por cuatro marcas de galletas: A, B, C y D. Halla: $\theta_1 + \theta_3$



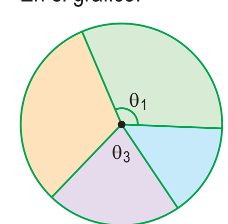
Resolución:

Debemos tener en cuenta que en un diagrama circular, el ángulo correspondiente a un sector circular se calcula así:

$$\theta_i = \frac{f_i}{n} \times 360°$$

$\theta_i = h_i \times 360°$ $\theta_i = h_i \times 100\% \times 360°$

En el gráfico:



Del enunciado:

$27\% + 31\% + 11K\% + 10K\% = 100\%$
$21K\% = 42\%$
$K = 2$

Luego:

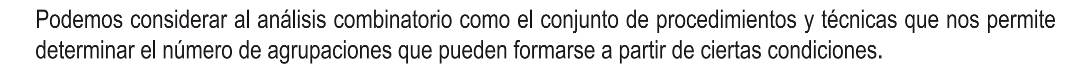
$\theta_3 = 22\% \times 360° \wedge \theta_1 = 27\% \times 360°$
$\theta_3 = 79{,}2°$ $\theta_1 = 97{,}2°$

Piden:

$\theta_1 + \theta_3 = 97{,}2° + 79{,}2° = 176{,}4°$

◆ ANÁLISIS COMBINATORIO

A



Podemos considerar al análisis combinatorio como el conjunto de procedimientos y técnicas que nos permite determinar el número de agrupaciones que pueden formarse a partir de ciertas condiciones.

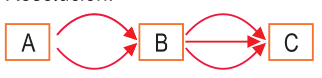
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

Principio de multiplicación

Si un acontecimiento A puede efectuarse de m maneras diferentes y cuando ha sido efectuado, se realiza otro acontecimiento B; que puede efectuarse de n maneras diferentes, entonces ambos acontecimientos (A y B) se podrán realizar de $m \times n$ maneras diferentes.

Ejemplo:
Si para ir de A hasta B se tienen dos caminos diferentes y para ir de B a C se tienen tres caminos diferentes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede ir de A a C pasando siempre por B?

Resolución:



Para ir de A hasta C, pasando siempre por B habrán $2 \times 3 = 6$ maneras distintas.

Nota

Otra forma de visualizar nuestro ejemplo es a través del diagrama de árbol.

Camino A – B	Camino B – C	Camino A – C
a_1	b_1	a_1b_1
	b_2	a_1b_2
	b_3	a_1b_3
a_2	b_1	a_2b_1
	b_2	a_2b_2
	b_3	a_2b_3

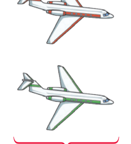
Se observa que en total hay 6 maneras diferentes para ir desde A hasta C.

Principio de adición

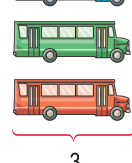
Si un acontecimiento A puede realizarse de m maneras diferentes y otro acontecimiento B puede realizarse de n maneras diferentes, siendo imposible realizar ambos eventos de manera simultánea o uno seguido del otro, entonces para poder llevar a cabo cualquiera de ellos (A o B) se podrá realizar de $m + n$ maneras diferentes.

Ejemplo:
Luis puede viajar de Arequipa a Tumbes por vía aérea, utilizando 2 líneas de transporte aéreo o por vía terrestre a través de 3 líneas de ómnibus. ¿De cuántas maneras puede realizar el viaje de Arequipa a Tumbes?

Resolución:



o



2 3

Por lo tanto, Luis podrá ir de Arequipa a Tumbes, por vía aérea o terrestre de $2 + 3 = 5$ maneras diferentes.

Atención

El factorial de un número entero positivo, denotado por n! o $\lfloor n$, es el producto de todos los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta n. Es decir:

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times n$

Variaciones	Permutaciones	Combinaciones
Las variaciones simples de n elementos de orden r son todas las ordenaciones de r elementos, sin repetición, de un conjunto de n objetos. **Propiedad** El número de variaciones simples de n elementos de orden r, denotado por V_r^n, está dado por: $V_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ Ejemplo: ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2; 4 y 6? Resolución: En este caso n = 3 y r = 2, luego: $V_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{1} = 6$	Las permutaciones simples de n elementos, son las variaciones simples de n elementos de orden n. **Propiedad** El número de permutaciones simples de n elementos denotado por P_n, está dado por: $P_n = n!$ Ejemplo: ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2; 4 y 6? Resolución: En este caso n = 3, luego: $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$	Las combinaciones simples de n elementos de orden r, son todas las agrupaciones de r elementos sin repetición, de un conjunto de n objetos, sin importar el orden. **Propiedad** El número de combinaciones simples de n elementos de orden r, denotado por C_r^n, está dado por: $C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)! \times r!}$ Ejemplo: ¿Cuántos comités de 3 miembros se pueden elegir de un grupo de 5 personas? Resolución: En este caso n = 5 y r = 3, entonces: $C_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$

Recuerda

- $n! = (n-1)! \times n$
- $1! = 1$
- $0! = 1$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántas combinaciones se pueden obtener con las letras A, B, C y D tomándolas de 2 en 2?

Resolución:

$n = 4 \wedge r = 2$

Luego, por definición sabemos:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

2 ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 4 personas, en una banca de 4 asientos?

Resolución:

$n = 4 \wedge k = 4$

$$\Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1}$$

$\therefore V_4^4 = 4! = 24$ maneras diferentes.

3 ¿Cuántos comités de 3 miembros se pueden elegir de un grupo de 6 personas?

Resolución:

Un comité estará constituido por un grupo de tres personas sin importar el orden en que hayan sido nombradas, entonces el número de maneras en que se puede elegir es:

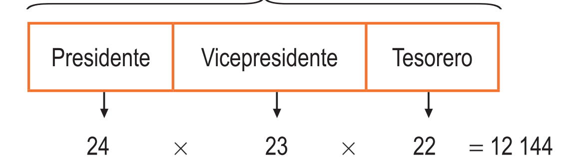
$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!}$$

$$\therefore C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

4 En un club participan 24 socios para la elección de un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas maneras diferentes se puede llevar a cabo dicha elección?

Resolución:

Formas de escoger al:



24 × 23 × 22 = 12 144

Otra forma:

$$V_3^{24} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21!}{21!}$$

$\therefore V_3^{24} = 12\,144$ maneras

5 Del personal médico de un hospital se eligen 5 doctores y 3 enfermeras para que de ellos, se escojan 4 miembros donde haya no menos de dos enfermeras. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

Resolución:

Tomemos el caso de que el grupo está formado por 2 doctores y 2 enfermeras, entonces el número de maneras para este caso es:

$$C_2^5 \times C_2^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 30$$

Y si el grupo está formado por 1 doctor y 3 enfermeras, entonces el número de maneras para este caso es:

$$C_1^5 \times C_3^3 = 5 \times 1 = 5$$

Ahora, ambas posibilidades se pueden dar, pero no a la vez, entonces el número de maneras de efectuarse la elección será la suma de ambas posibilidades:

$\therefore$ n.° de maneras de efectuarse la elección: $30 + 5 = 35$

6 En el consejo de una ciudad hay 10 consejeros y 5 regidores. ¿Cuántos comités pueden formarse si cada comité debe de constar de 5 consejeros y 3 regidores?

Resolución:

El número de maneras de escoger 5 consejeros de 10 es:

$$C_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)! \times 5!} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$$

El número de maneras de escoger 3 regidores de 5 es:

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

Por cada manera, de las 252, de escoger 5 consejeros, hay 10 maneras de escoger 3 regidores, entonces:

$$252 \times 10 = 2520$$

Por lo tanto, se pueden formar 2520 comités formados por 5 consejeros y 3 regidores.

7 Una persona tiene 4 anillos diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede colocarlos en sus dedos de la mano derecha poniendo un sólo anillo por dedo?

Resolución:

El 1.^{er} anillo se puede colocar en cualquiera de los cinco dedos de la mano derecha.
El 2.° anillo se puede colocar en cualquiera de los cuatro dedos restantes.
El 3.^{er} anillo se puede colocar en cualquiera de los tres dedos restantes.
El 4.° anillo se puede colocar en cualquiera de los dos dedos restantes.
Luego, los anillos pueden colocarse de:
$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ formas diferentes.

PROBABILIDADES

EXPERIMENTO ALEATORIO

Un experimento aleatorio es una prueba cuyo resultado no es predecible de forma absoluta, pues estos dependen del azar.

Ejemplos:
- Lanzar un dado y observar el resultado.
- Lanzar dos monedas simultáneamente y observar el resultado.

ESPACIO MUESTRAL

Se llama espacio muestral al conjunto de todos los resultados posibles de un determinado experimento aleatorio, denotado por Ω.

Ejemplos:
Para los experimentos anteriores, tenemos:
$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
$\Omega_2 = \{CC; CS; SC; SS\}$

EVENTO

Es cualquier subconjunto del espacio muestral (Ω).

Ejemplos:
- Para el espacio muestral Ω_1, sea el evento:
  A: obtener un número par $\Rightarrow A = \{2; 4; 6\}$
- Para el espacio muestral Ω_2, sea el evento:
  B: obtener al menos una cara $\Rightarrow B = \{CC; CS; SC\}$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Esta definición fue dada por Laplace a finales del siglo XVII, el cual se define de la siguiente manera:

> La probabilidad de un evento es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que algunos de estos sucesos debe tener preferencia a los demás, lo que hace que todos sean igualmente probables.

Es decir, sea A un evento de cierto experimento aleatorio, entonces:

$$P(A) = \frac{\text{n.° de casos favorables}}{\text{n.° de casos totales}}$$

Ejemplo:
Halla la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado.

Resolución:
Espacio muestral: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Sea el evento:
A: se obtiene un número par al lanzar un dado.

Entonces:
$A = \{2; 4; 6\} \subset \Omega \Rightarrow n(A) = 3$

Luego, el número de casos totales es $n(\Omega) = 6$ y el número de casos favorables es $n(A) = 3$.

$$P(A) = \frac{\text{n.° de casos favorables}}{\text{n.° de casos totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

Nota

Aquellos experimentos cuyos resultados son totalmente predecibles, se denominan experimentos no aleatorios o determinísticos.
Ejemplo:
La suma de dos números impares.

Observación

A cada elemento del espacio muestral se le denomina punto muestral.

Atención

En un espacio muestral de n elementos, se puede definir 2^n eventos diferentes.

Ejemplo:
Sea el espacio muestral:
$\Omega = \{C; S\}$

En él se pueden definir $2^2 = 4$ eventos, los cuales son:
ϕ; {C}; {S}; {C; S}

Recuerda

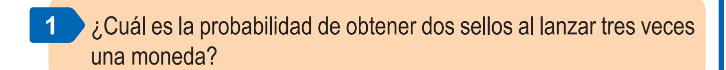
Al espacio muestral Ω, se le denomina evento seguro y se cumple:
$P(\Omega) = 1$

Nota

Al conjunto vacío $\varnothing$, se le denomina evento imposible y cumple:
$P(\varnothing) = 0$

Para todo evento A de un espacio muestral, se cumple:
$0 \leq P(A) \leq 1$

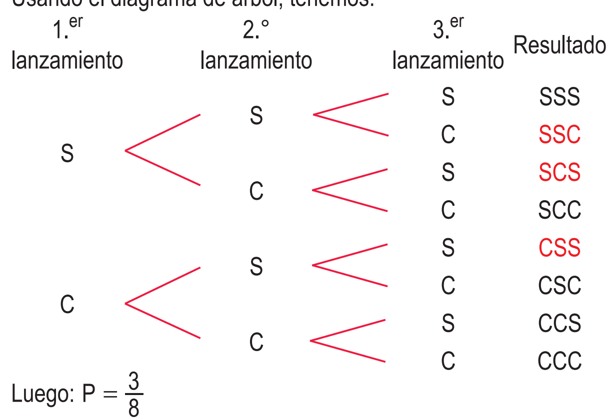
Problemas resueltos



1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos al lanzar tres veces una moneda?

Resolución:

Usando el diagrama de árbol, tenemos:

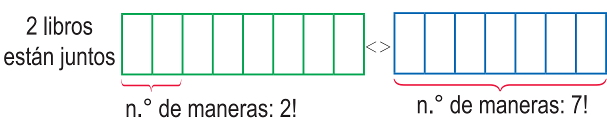


Luego: $P = \frac{3}{8}$

2 Ocho libros diferentes se ubican aleatoriamente en un estante. Halla la probabilidad que dos libros determinados estén juntos.

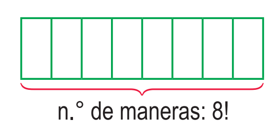
Resolución:

Del enunciado:



Sea el evento:
A: dos libros determinados están juntos.
Entonces, el número de maneras de ordenar 8 libros estando dos juntos es $2! \times 7!$, es decir: $n(A) = 2! \times 7!$

Se tiene:



Entonces, el número total de maneras de ordenar 8 libros en un estante es 8!, es decir: $n(\Omega) = 8!$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{1}{4} = 0,25$$

3 En una caja hay 15 piezas, de las cuales 10 están pintadas. Si se extrae al azar 3 piezas, halla la probabilidad de que las piezas escogidas resulten pintadas.

Resolución:

El número de maneras de extraer 3 piezas de 15, sin tener en cuenta la ordenación de los mismos es: C_3^{15}, es decir: $n(\Omega) = C_3^{15}$

Sea el evento:
A: las 3 piezas escogidas están pintadas.
Entonces, el número de maneras de escoger 3 piezas pintadas es: C_3^{10}, es decir: $n(A) = C_3^{10}$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^{10}}{C_3^{15}} = \frac{\frac{10!}{(10-3)! \times 3!}}{\frac{15!}{(15-3)! \times 3!}} = \frac{120}{455} = 0,26$$

4 En un paquete hay 20 tarjetas perforadas marcadas con los números 101; 102; ...; 120 y dispuestas al azar. Si una persona extrae al azar dos tarjetas, halla la probabilidad de que sean escogidas las tarjetas perforadas con los números 101 y 120.

Resolución:

El número total de resultados elementales del experimento es igual al número de combinaciones de 20 tomados de 2 en 2, es decir: C_2^{20}

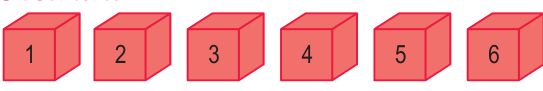
El número de resultados favorables que aparezcan las tarjetas perforadas con los números 101 y 120 es 1; el par (101; 120).

Luego; considerando el evento:
A: se escoge las tarjetas perforadas con los números 101 y 120.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{C_2^{20}} = \frac{1}{\frac{20!}{(20-2)! \times 2!}} = \frac{1}{190}$$

5 En una caja hay 6 cubos iguales, numerados del 1 al 6. Si se extrae uno a uno al azar, halla la probabilidad de que los números de los cubos extraídos aparezcan en orden creciente.

Resolución:



Si se escogen uno a uno al azar, entonces, el espacio muestral estará conformado por todas las ordenaciones lineales diferentes, es decir:

$$\Omega = \{123456; 134625; 143265; ...\} \Rightarrow n(\Omega) = 6!$$

Sea el evento:
A: los números de los cubos extraídos aparecen en orden creciente.

Se tiene que el evento A está formado por un solo elemento que es 123456, entonces: $n(A) = 1$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

6 Al marcar un número de teléfono, una persona se olvidó las tres últimas cifras, recordando solamente que estas cifras son diferentes. Si esta persona marcó al azar estos tres números, halla la probabilidad de que haya marcado las cifras correctas.

Resolución:

Un teléfono cuenta con 10 cifras para marcar: 0; 1; 2; 3; ...; 9
En este caso el espacio muestral estará conformado por todos los arreglos posibles formados por estas 10 cifras tomados de 3 en 3, además por ser un número telefónico se debe tener en cuenta la ordenación de estos 3 dígitos; entonces:

$$n(\Omega) = V_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

Sea el evento:
A: se ha marcado las cifras correctas.
En este caso el evento A está formado por un solo elemento, entonces:

$$n(A) = 1$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{720}$$